Resumen de temas 1er parcial de Fisica II

14 de junio de 2015

La siguiente lista de temas y el breve desarrollo de algunas de ellas son, a grandes rasgos, los contenidos totales del primer parcial de la materia. El propósito de este resumen es que tengan a mano el listado de los temas, las fórmulas más importantes, los valores de algunas constantes fundamentales y la secuencia de los temas vistos que van a tomarse en el examen. De ninguna manera pretende reemplazar sus apuntes ni libros, sino servir de referencia.

- Carga eléctrica. Tipos de carga. Fuerzas de atracción y repulsión entre cargas.
- Conservación de la carga eléctrica: La suma algebráica de todas las cargas eléctricas en cualquier sistema cerrado se conserva.
- Carga elemental. La magnitud de la carga del electrón (o del protón) es la unidad natural de carga o "cuanto"de carga. Es la mínima carga eléctrica que puede encontarse y por ende cualquier carga puede ser expresada como $Q = n\,e$, siendo $n = 1, 2, 3, 4, 5, ...$ y $e = 1,602 \times 10^{-19}C$ (magnitud de la carga del electrón).
- Conductores y aislantes (dieléctricos). Principales propiedades y diferencias entre ambos.
- Ley de Coulomb.

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

donde $\epsilon_0 = 8,82 \times 10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}$ es la pertimitividad eléctrica del vacío.
- Fuerza eléctrica y principio de superposición aplicado a un conjunto de cargas.

$$\vec{F}_{TOTAL} = \sum \vec{F}_i = \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q q_i}{r_i^2}\hat{r}$$

Donde q es la carga sobre la cual se analiza la fuerza total $\vec{F}_{TOTAL}$ y q_i son las cargas restantes, ubicadas a distancias r_i. *La sumatoria es vectorial.*
- Campo Eléctrico (Fuerza por unidad de carga). Definición.

$$\vec{E} = lim_{q_0 \to 0}\frac{\vec{F}}{q_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

- Campo eléctrico debido a varias cargas. Principio de superposición.

$$\vec{E}_{TOTAL} = \sum \vec{E}_i = \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}$$

- Distribuciones continuas de carga.

$$\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

Siendo $dq = \lambda.dl$ para el caso de una distribución continua lineal; $dq = \sigma.dA$ para el caso de una distribución superficial de carga y $dq = \rho_v.dv$ para el caso de una distribución volumétrica de carga (para este último caso, como el de una esfera dieléctrica cargada homogéneamente en todo su volumen resulta muy útil la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico $\vec{E}$.

- Líneas de campo eléctrico. Propiedades. Líneas de campo eléctrico para las distintas configuraciones de carga vistas *(carga puntual, dipolo eléctrico, esfera conductora cargada sólida y hueca, esfera dielétrica cargada, hilo finito cargado, hilo infinito cargado, anillo con carga, plano con carga, planos enfrentados con carga opuesta).* Tener presente analizar, para el caso de las esferas, el campo para zonas en el interior y el exterior de las mismas, de acuerdo al material (diferencia cuando es conductora o dieléctrica).

- Campo eléctrico de distintas configuraciones de carga. Variación del módulo del campo eléctrico en función de la distancia.

- Dipolo eléctrico. Obtención de la expresión del campo eléctrico por superpocisión. Expresión para campo lejano. Momento dipolar eléctrico.

- Flujo eléctrico $\phi_E = \int_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{A}$ en forma genérica, para un área dada cualquiera.

- Ley de Gauss

$$\Phi_E = \oint_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Nótese cómo *la Ley de Gauss analiza el flujo eléctrico sobre una superficie cerrada* (no cualquier superficie) e iguala dicho valor a la *carga neta encerrada* por dicha superficie, *dividido por* ϵ_0. La carga neta encerrada es la suma algebráica de las cargas (suma signada) en el interior de la superficie gaussiana.

El teorema de la divergencia establece que la integral de superficie cerrada del producto punto $\vec{X} \cdot \vec{ds}$ (siendo $\vec{X}$ un campo vectorial dado) resulta igual a la integral de volumen de la divergencia de dicho vector $\int_{vol} div(\vec{X})$. El volumen de la integral volumétrica es el contenido por la superficie de la integral de superficie, es decir, analiza la existencia de fuentes y sumideros de dicho campo $\vec{X}$ dentro del volumen contenido por la superficie.

$$\oint_{sup} \vec{X} \cdot \vec{ds} = \int_{vol} div(\vec{X})\, dv$$

De esta manera podemos expresar la ley de Gauss como:

$$\oint_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{vol} div(\vec{E})\, dv = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \int_{vol} \frac{\rho_v}{\epsilon_0} dv$$

Siendo ρ_v la densidad volumétrica de carga en dicho volumen, es decir $\rho_v = \frac{q}{vol}$, siendo vol el volumen bajo estudio.

Quedándonos con las integrales de volumen obtenemos:

$$\int_{vol} div(\vec{E})\, dv = \int_{vol} \frac{\rho_v}{\epsilon_0} dv$$

$$div(\vec{E}) = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

Que es la forma vectorial de la Ley de Gauss, también expresada como

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

Donde ∇ (nabla) es el operador vectorial $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$ y cualquier campo eléctrico $\vec{E}$ puede representarse a través de sus componentes xyz, en la forma $\vec{E} = E_x\,\hat{\imath} + E_y\,\hat{\jmath} + E_z\,\hat{k}$, y la divergencia será entonces el producto punto entre dichos vectores. Por lo tanto, en forma genérica se obtiene:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz}$$

En el caso de alguna de las componentes del campo eléctrico sea nula, la operación se facilita notablemente.

- Aplicaciones de la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico debido a distintas distribuciones de carga: Carga puntual, esfera conductora cargada (sólida y hueca), esfera dieléctrica cargada, línea infinita con densidad de carga lineal λ, plano infinito (lámina) con densidad de carga superficial σ, planos infinitos enfrentados (caso de placas paralelas enfrentadas). Interpretación del efecto de borde para el caso real de este último caso.

- Análisis del campo eléctrico (nulo) en el interior de un condutor.

- Potencial electrostático V.

Definición.

La diferencia de potencial $V_{ab} = V_a - V_b$ es igual al trabajo realizado por el campo eléctrico para trasladar una carga desde un punto a a un punto b, independizándose del valor de dicha carga (carga de prueba para la demostración matemática), es decir, el trabajo *realizado por unidad de carga*.

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{W_{a\to b}}{q_0}$$

Analizamos el trabajo realizado por la fuerza eléctrica sobre una carga de prueba al colocarla en un campo eléctrico originado por una dada carga.

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_a^b F\, dr\, cos\theta$$

Considerando el trabajo realizado por el campo eléctrico para trasladar una carga de prueba de a a b:

$$W_{a\to b} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot \vec{dr} = (q_0 E)\, d = q_0 E\, (r_a - r_b) = q_0 E r_a - q_0 E r_b \tag{1}$$

Siendo d el módulo del vector desplazamiento del punto a al punto b.

Si la fuerza $\vec{F}$ es conservativa (como el caso de las fuerzas gravitatoria, elástica y nuestra fuerza eléctrica), el trabajo realizado por dicha fuerza es independiente de la trayectoria y sólo depende de los puntos inicial y final de la misma. Además, este trabajo puede ser expresado en términos de las energías potenciales U (electrostática en nuestro caso) en tales puntos inicial y final. Recuerque $\Delta U = U_{final} - U_{inicial} = U_a - U_b$.

$$W_{a\to b} = U_a - U_b = -\left(U_b - U_a\right) = -\Delta U$$

$$W_{a\to b} = -\Delta U \tag{2}$$

De esta manera, con las ecuaciones 1 y 2 podemos hallar una expresión para la energía potencial electrostática en un dado punto:

$$W_{a\to b} = U_a - U_b = q_0 E r_a - q_0 E r_b$$

Por lo tanto, la energía potencial electrostática en un punto dado a resulta $U_a = q_0 E r_a$ siendo E el campo eléctrico generado por una carga dada q_1. En forma genérica, para cualquier punto y cualquier PAR de cargas podemos expresar:

$$U = q_2 E r = q_2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^2} \right) r_{12}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Que es la energía potencial electrostática de un PAR de cargas. Nótese que para UNA única carga no es posible definir su energía potencial electrostática, ya que es una propiedad compartida por al menos DOS cargas.

Para un caso genérico de n cargas se aplica el principio de superposición para hallar la energía potencial de una carga en función de las cargas restantes:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q\, q_i}{r_i}$$

Siendo esta suma del tipo algebráica.

Habiendo definido la energía potencial electrostática de esta manera y la diferencia de potencial como el trabajo por unidad de carga, puede deducirse que:

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{W_{a \to b}}{q_0} = \frac{U_a - U_b}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_a} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

De esta manera, podemos analizar el potencial electrostático en un punto dado haciendo que $r_b \to \infty$, con lo que obtenemos, de manera genérica, el potencial electrostático en un punto dado:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Para un conjunto de n cargas se aplica el principio de superposición, de manera de obtener el potencial total debido a cada carga, en un punto.

$$V_{total} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i}$$

Donde q_i son las diversas cargas existentes y r_i la magnitud de la distancia al punto en el cual se desea calcular el potencial. *Importante: Note que para calcular el pontencial V en un punto, en tal punto puede o no haber otra carga. Una única carga en el vacío genera sus campos eléctrico (vectorial) y potencial (escalar), independientemente de la existencia de otras cargas. Por otro lado, tanto para el cálculo de una fuerza electrostática o una energía potencial electrostática es necesario al menos la existencia de dos cargas (o más), ya que es una propiedad compartida entre las mismas.*

Definición de potencial electrostático (Sears): "V_{ab}, el potencial de a respecto a b es igual al trabajo realizado por la fuerza eléctrica cuando una unidad de carga se desplaza de a a b (sin acelerarse, ya que de esa manera deberíamos también considerar la energía cinética).

- Obtención del potencial eléctrico V (campo escalar) a partir del campo eléctrico $\vec{E}$ (campo vectorial).

$$V_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

Siendo $\vec{dl}$ un diferencial de desplazamiento lineal, que podemos reemplazar por $dr\,\hat{r}$ o, por ejemplo $dx\,\hat{\imath}$, de acuerdo a la dirección del campo eléctrico bajo estudio y el sistema de coordenadas que utilicemos.

Gradiente de potencial:

$V_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_b^a dV$, siendo dV la variación del potencial electrostático, cuyo incremento va en dirección opuesta al campo eléctrico (note los límites de integración). Cambiando los límites de la última integral (y colocando un signo menos para mantener la igualdad) obtenemos:

$$-\int_a^b dV = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$-dV = \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

En forma genérica: $\vec{E} = E_x\,\hat{\imath} + E_y\,\hat{\jmath} + E_z\,\hat{k}$ y $\vec{dl} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}$, por lo que:

$$-dV = \vec{E} \cdot \vec{dl} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Lo que puede expresarse mediante el operador nabla ∇:

$$\vec{E} = -\nabla V = -grad(V)$$

- Efecto puntas. Ionización y descarga en corona.
- Líneas y superficies equipotenciales (superficies y líneas de $V = cte$). Perpendicularidad entre éstas y las líneas de campo eléctrico $\vec{E}$.
- Capacidad. Definición: La capacidad representa la cantidad de carga que puede almacenar una determina configuración de electrodos que se encuentra a una dada diferencia de potencial,es decir:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V_{ab}}$$

Procedimiento para hallar la capacidad de una dada geometría:

1) Hallar la expresión del campo eléctrico entre los electrodos positivo y negativo.
2) A partir del campo eléctrico, obtener la expresión de la diferencia de potencial entre dichos electrodos.
3) Reemplazar la expresión de la diferencia de potencial en la definición de capacidad. La capacidad, luego de las simplificaciones correspondientes será función de la geometría del conjunto de elctrodos (áreas y distancias) y del material entre ambos (vacío en principio).

- Capacitor de placas paralelas. Deducción por el procedimiento citado de su capacidad.

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

- Energía almacenada en un capacitor. $U = \frac{1}{2}CV^2$.
- Interconexión de capacitores. Serie y paralelo de dos o más capacitores. Interconexiones combinadas.

Serie: $\frac{1}{C_{total}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ... + \frac{1}{C_n}$ Los capacitores tienen la misma carga Q pero la diferencia de potencial entre placas para cada uno de ellos depende de su capacidad.

Paralelo: $C_{total} = C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_n$ Los capacitores en paralelo comparten la misma diferencia de potencial V, pero la carga que almacena cada uno depende de su valor de capacidad.

- Obtención de la capacidad total de un conjunto de capacitores interconectados, combinanción serie-paralelo. Obtención de la diferencia de potenical sobre cada uno de ellos y la carga que almacena cada uno. Cálculo de la energía del capacitor total equivalente (energía total del sistema) y energía almacenada por cada uno de los capacitores.