9. Inducción magnética

9.1. Problema

9.1.1. Enunciado

Se coloca una bobina de alambre que contiene 500 espiras circulares con radio de $4cm$ entre los polos de un electroimán grande, donde el campo magnético es uniforme y tiene un ángulo de 60° con respecto al plano de la bobina. El campo disminuye a razón de $0,2\frac{T}{s}$. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fem inducida?

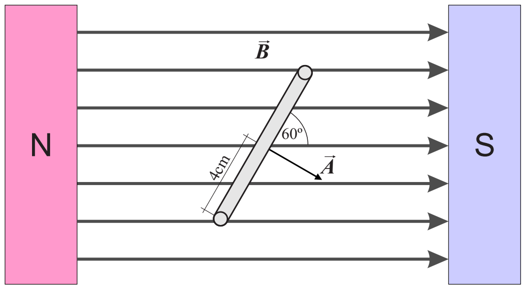

Figura 9.1: Bobina con corriente en un campo B variable.

9.1.2. Respuesta

$\varepsilon = 0,435V$

9.1.3. Solución

Debe tenerse en cuenta que el ángulo dado como dato es el complementario del ángulo de nuestro interés, que es el presente entre los vectores de campo $\vec{B}$ y área $\vec{A}$, es decir, dicho ángulo resulta entonces $\theta = 30°$.

Se plantea la ley de Faraday-Lenz:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_{TOTAL}}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

Se sabe que la variación temporal del campo $\vec{B}$ es $\frac{dB}{dt} = -0,2\frac{T}{s}$ (el signo menos indica que la variación es en el sentido en que disminuye B), de manera que conviene expresar al flujo magnético como su producto escalar.

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} = -N\frac{d\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)}{dt} = -N\frac{d\left(B\,A\,cos(\theta)\right)}{dt}$$

Dado que tanto el área A como el ángulo θ no varían con el tiempo pueden retirarse de la derivación.

$$\varepsilon = -N\,A\,cos(\theta)\frac{d\left(B\right)}{dt}$$

Reemplazando se obtiene:

$$\varepsilon = -\left(500\right)\left[\pi\times\left(0,04m\right)^2\right]\,cos(30)\left(0,2\frac{T}{s}\right)$$

$$\varepsilon = 0,435V$$

Para analizar el sentido de la fem utilizamos la regla de la mano derecha: con el dedo pulgar derecho apuntado en la dirección del vector área $\vec{A}$, los dedos restantes darán el sentido de la fem, *que para este caso será horario tomando como punto de vista el polo norte del electroimán.*

9.2. Problema

9.2.1. Enunciado

Alternador simple.

La figura muestra una versión sencilla de un alternador, un dispositivo que genera una fem. Se hace girar una espira rectangular con velocidad angular constante ω alrededor del eje que se indica. El campo magnético es uniforme y constante. En el momento $t = 0$, $\varphi = 0$. Determine la fem inducida.

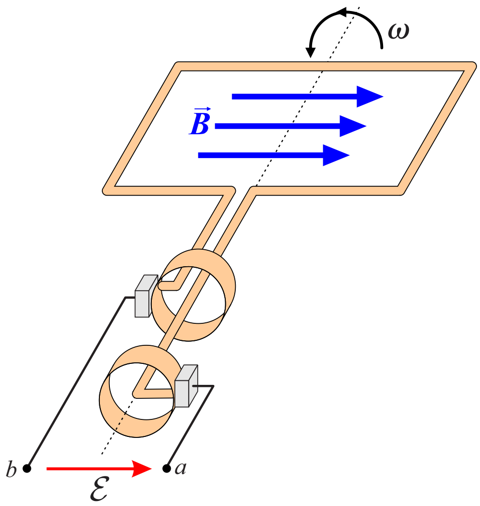

Figura 9.2: Alternador.

9.2.2. Respuesta

$\varepsilon = \omega BAsen(\omega t)$

9.2.3. Solución

Se plantea la ley de Faraday-Lenz.

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} \tag{19}$$

Para este caso se considera una única espira ($N = 1$). Analizamos el flujo magnético.

$$\Phi = BAcos\left(\theta\right)$$

El ángulo θ es función del tiempo t, relacionado por la velocidad angular ω de la siguiente manera: $\theta = \omega t$

$$\therefore\ \Phi = BAcos\left(\omega t\right)$$

Analizamos su derivada con respecto al tiempo.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left[BAcos\left(\omega t\right)\right] = -\omega BAsen\left(\omega t\right) \tag{20}$$

Reemplazando 20 en 19 se obtiene:

$$\varepsilon = \omega BANsen\left(\omega t\right) \tag{21}$$

Y para el caso puntual $N = 1$:

$$\varepsilon = \omega BAsen\left(\omega t\right)$$

9.3. Problema

9.3.1. Enunciado

El alternador del ejemplo produce una fem que varía de modo sinusoidal y por ello genera una corriente alterna. Se puede utilizar un esquema similar para fabricar un generador de corriente directa (cd) que produzca una fem que siempre tenga el mismo signo. En la figura se ilustra un prototipo de generador. El arreglo de anillos colectores se llama conmutador; revierte las conexiones al circuito externo en posiciones angulares en las que se invierte la fem. Los generadores de cd comerciales tienen un gran número de segmentos de bobinas y conmutadores; este arreglo suaviza las fluctuaciones en la fem, por lo que el voltaje terminal no sólo es unidireccional, sino prácticamente constante. La fuerza contraelectromotriz es simplemente la fem inducida por el flujo magnético cambiante a través de su bobina giratoria.

Considere un generador de cd con bobina cuadrada de $10cm$ de lado, con 500 espiras de alambre. Si el campo magnético tiene una magnitud de $0,2T$, ¿a qué velocidad de rotación la fuerza contraelectromotriz media del motor es igual a $112V$?

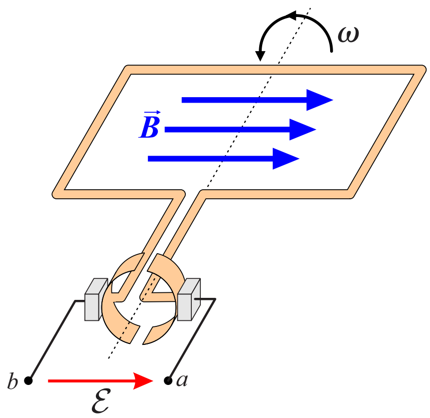

Figura 9.3: Generador DC.

9.3.2. Respuesta

$\omega = 1680rpm$

9.3.3. Solución

Se parte del conocimiento de la fem ε generada por un alternador, cuyo resultado se expresa en la ecuación 21, que repetimos a continuación, cuyo valor expresamos en módulo para independizarnos del sentido del campo B y del sentido de giro ω.

$$|\varepsilon| = \omega BAN sen(\omega t)$$

Para obtener la fuerza contraelectromotriz media, debe hallarse el valor medio de la función $sen(\omega t)$:

$$< sen(\omega t) >= \frac{1}{T}\int_0^T sen(\omega t)\,dt$$

Como se trata de un generador de corriente directa (cd), sólo nos interesa la primera mitar del período de esta función senoidal (de todas maneras, calculando como está representado, el valor medio sería 0). Entonces:

$$< sen(\omega t) >= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} sen(\omega t)\,dt$$

Realizando un cambio de límites de acuerdo a: $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$

$$< sen\,(\omega t) >= \frac{\pi}{\omega} \int_{0}^{\frac{\pi}{\omega}} sen\,(\omega t)\,dt = \frac{2}{\pi}$$

Se invita al lector a verificar el resultado de la integral.
De esta manera, podemos expresar el valor medio de la fem ε:

$$< \varepsilon >= N\frac{2}{\pi}\omega BA$$

Siendo la velocidad angular ωla incógnita, se despeja de la ecuación, quedando:

$$\omega = \frac{< \varepsilon > \pi}{2NBA}$$

Reemplazando valores obtenemos:

$$\omega = \frac{(112V)\,\pi}{2\,(500)\,(0,2T)\,(0,1m)^2}$$

$$\omega = 176\frac{1}{s}$$

Convertimos el resultado a unidades de revoluciones por minuto (rpm):

$$\omega_{(rpm)} = \omega_{\left(\frac{rad}{s}\right)}\frac{60s}{2\pi} = 176\frac{1}{\cancel{s}}\,\frac{60\cancel{s}}{2\pi}$$

$$\omega_{(rpm)} = 1680rpm$$

9.4. Problema

9.4.1. Enunciado

La figura muestra un conductor en forma de U sumergido en un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la figura, dirigido hacia la página. Colocamos una varilla de metal con longitud L entre los dos brazos del conductor para formar un circuito, y movemos la varilla hacia la derecha con velocidad constante. Esto induce una fem y una corriente, que es la razón por la que este dispositivo se llama generador de conductor corredizo. Determine la magnitud y dirección de la fem inducida resultante.

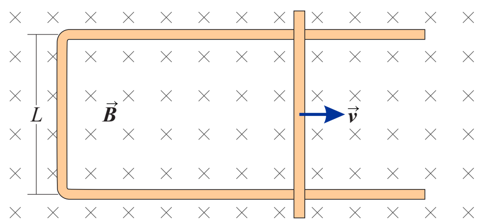

Figura 9.4: Espira con varilla móvil.

9.4.2. Respuesta

$\varepsilon = -BLv$

9.4.3. Solución

La deducción de la fem ε generada por esta espira de área variable se basa en analizar dicha variación, que de acuerdo a la ley de Faraday originará una fem inducida en ella si se encuentra sumergida en un campo magnético B, en principio constante. Por supuesto, si tanto el área como el campo B son variables con el tiempo (y si dicha variación no produce exactamente fenómenos opuestos) también habrá una fem inducida dada por dicha ley. De esta manera, analizamos gráficamente cómo varía el área de la espira luego de un tiempo diferencial dt.

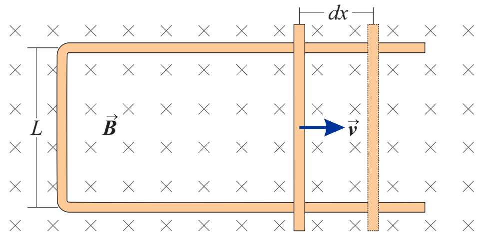

Figura 9.5: Variación del área en la espira con un lado móvil.

Para una velocidad de avance de la varilla móvil $v = \frac{dx}{dt}$ se obtiene:

$$dA = L\,v\,dt$$

$$\frac{dA}{dt} = L\,v$$

Haciendo uso de la ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)}{dt}$$

Para este caso, de acuerdo con el esquema de la figura, $\vec{B} \parallel \vec{A}$ y $B = cte$, por lo que puede retirarse de la derivada temporal.

$$\varepsilon = -B\frac{dA}{dt}$$

$$\varepsilon = -B\,L\,v$$

Dada la expresión de la fem ε inducida en la espira, la *ley de Lenz* indica que la corriente que circule entonces por dicha espira generará a su vez un campo B opuesto al que la generó, es decir, la dirección de la fem inducida será tal que se oponga a la causa que la produjo. Dado el campo B constante entrante a la página, la regla de la mano derecha nos indica que la fem inducida será tal que genere una circulación de corriente en *sentido antihorario*, generando así un campo magnético B *saliente* de la página, en oposición al que lo generó.

La expresión $\varepsilon = -B\,L\,v$ puede generalizarse para este tipo de casos, que llamaremos "fem de movimiento", tomando como parámetros los vectores $\vec{v}$, $\vec{L}$ y $\vec{B}$ y haciendo uso de la regla de la mano derecha para indicar el sentido de dicha fem ε:

$$\varepsilon = \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{L} \tag{22}$$

Que en forma totalmente genérica se puede expresar en forma diferencial, para aquellos casos en los que la velocidad no sea constante con la posición:

$$\varepsilon = \oint\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{dl} \tag{23}$$

9.5. Problema

9.5.1. Enunciado

En el generador de conductor corredizo del ejercicio anterior, la energía se disipa en el circuito debido a su resistencia. Sea R la resistencia del circuito (constituido por conductor corredizo y el conductor en forma de U que conecta los extremos del conductor corredizo) en un punto dado del movimiento del conductor corredizo. Demuestre que la tasa a la que se disipa energía en el circuito es exactamente igual a la tasa a la que se debe efectuar trabajo para desplazar la varilla a través del campo magnético.

9.5.2. Respuesta

$P_{disipada} = P_{aplicada} = \frac{(BLv)^2}{R}$

9.5.3. Solución

La tasa de disipación de energía del circuito es, en definitiva, la potencia que disipa el mismo, que de acuerdo a los conceptos vistos en electrodinámica resulta:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = P_d = I^2 R$$

Por otro lado, la tasa a la debe efectuarse trabajo es, análogamente, la potencia aplicada al sistema al realizar el trabajo necesario para producir el desplazamiento de la varilla móvil que cierra la espira:

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = P_a = \frac{\Delta\,(F\,x)}{\Delta t} = \frac{F \Delta x}{\Delta t} = F\,v$$

Igualando las expesiones:

$$P_d = P_a$$

$$I^2 R = F\,v$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 R = F\,v$$

Siendo la fem $\varepsilon = BLv$ *(fem inducida en una espira de área móvil en un campo B constante)* y la fuerza $F = ILB$ *(fuerza sobre un conductor recto con corriente en un campo B constante).*

$$\left(\frac{BLv}{R}\right)^2 R = ILB\,v$$

$$\frac{(BLv)^2}{R} = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right) LB\,v$$

$$\frac{(BLv)^2}{R} = \left(\frac{BLv}{R}\right) LB\,v$$

Dada la igualdad se concluye que la potencia disipada resulta igual a la potencia aplicada al sistema:

$$P_d = \frac{(BLv)^2}{R} = P_a$$

9.6. Problema

9.6.1. Enunciado

Suponga que la varilla móvil de la figura mide $0,1m$ de longitud, su velocidad v es de $2,5\frac{m}{s}$, la resistencia total de la espira es de $0,03\Omega$, y $B = 0,60T$. Calcule la fem, la corriente inducida y la fuerza que actúa sobre la varilla.

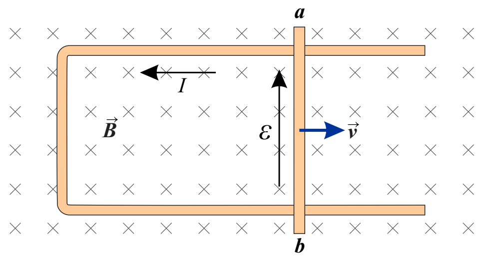

Figura 9.6: Espira con varilla móvil.

9.6.2. Respuesta

a) $\varepsilon = -0,150V$
b) $I = 5A$
c) $\vec{F} = 0,3N\left(-\hat{i}\right)$

9.6.3. Solución

a)

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)}{dt}$$

Nótese que los $\vec{B}\cdot\vec{A} = BAcos\left(0\right) = BA$, ya que $\vec{B} \parallel \vec{A}$.
Por otro lado, el campo B es constante con el tiempo, por lo que es constante en la derivación.

$$\varepsilon = -\frac{d\left(BA\right)}{dt} = -B\frac{dA}{dt} = -B\frac{d\left(L.x\right)}{dt} - BL\frac{dx}{dt} = -BLv$$

$$\varepsilon = -BLv = -\left(0,6T\right)\left(0,1m\right)\left(2,5\right)\frac{m}{s}$$

$$\varepsilon = -0,150V$$

b) Para hallar la corriente I se hace uso de la ley de Ohm:

$$\varepsilon = IR \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R}$$

$$I = \frac{0,150V}{0,03\Omega} = 5A$$

c) Sea $\vec{F_m}$ la fuerza magnética sobre la varilla, opuesta a la fuerza externa que genera su movimiento hacia la derecha.

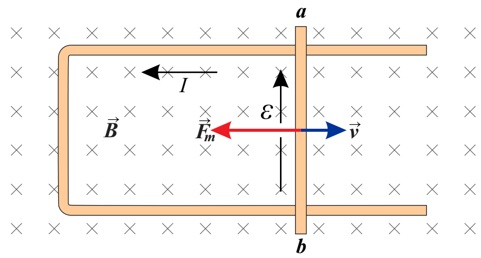

Figura 9.7: Fuerza magnética sobre la várilla móvil

Esta fuerza magnética que aparece sobre varilla móvil es, en definitiva, la fuerza sobre un conductor con corriente cuando éste se encuentra sobre un campo magnético B. En este caso, la corriente I es la inducida al desplazar con velocidad constante la varilla móvil hacia la derecha, es decir, $I = 5A$ con sentido antihorario, como se halló en el punto anterior.

Se aplica entonces la ecuación de la fuerza de Lorentz.

$$\vec{F}_m = I\vec{L} \times \vec{B}$$

Donde el vector $\vec{L}$ tiene la dirección de la corriente inducida. Aplicando la regla de la mano derecha para el producto vectorial $\vec{L} \times \vec{B}$ se obtiene una fuerza magnética $\vec{F}_m$ que apunta hacia el centro de la espira, lo que resulta lógico, ya que es la fuerza que se opone a la variación del flujo magnético. Se obtendrá ahora su valor.

$$\vec{F}_m = I\vec{L} \times \vec{B} = ILBsen(90)\left(-\hat{i}\right) = ILB\left(-\hat{i}\right)$$

$$\vec{F}_m = ILB\left(-\hat{i}\right) = (5A)\,(0,1m)\,(0,6T)\left(-\hat{i}\right)$$

$$\vec{F}_m = ILB\left(-\hat{i}\right) = 0,3N\left(-\hat{i}\right)$$

9.7. Problema

9.7.1. Enunciado

Dinamo de disco de Faraday.

Un disco conductor de radio R está en el plano xy y gira con velocidad angular constante ω alrededor del eje z. El disco está expuesto a un campo constante, uniforme, paralelo al eje z. Calcule la fem inducida entre el centro y el borde del disco.

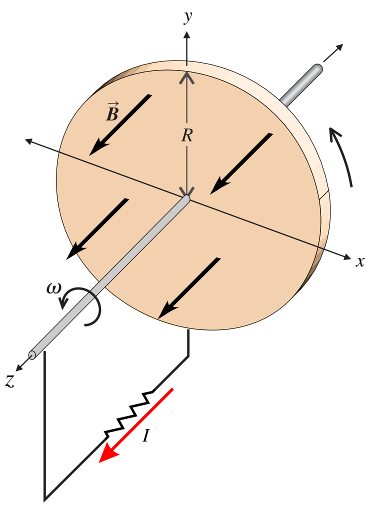

Figura 9.8: Dínamo de disco de Faraday.

9.7.2. Respuesta

$\varepsilon = \frac{B\omega R^2}{2}$ Con sentido tal que la corriente tendrá el sentido de la figura (perímetro a mayor potencial que el centro del disco).

9.7.3. Solución

Para hallar la fem inducida ε debe analizarse cuál (o cuáles) son las variables con respecto al tiempo que la originan. Este caso es muy similar al de una espira con varilla móvil, donde el área es la variable con respecto al tiempo y el campo B es constante. Para comprender cómo varía el área con respecto al tiempo en función de la velocidad angular del disco haremos uso del siguiente diagrama.

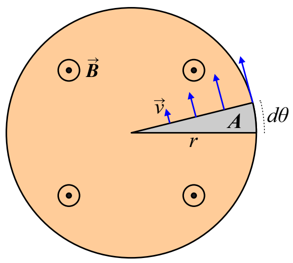

Figura 9.9: Análisis de la variación del área.

Se observa que la velocidad $\vec{v}$ es función de la distancia al centro del disco, mediante la relación ya conocida $\omega = vr$, siendo r la distancia radial desde el centro. De esta manera puede calcularse la fem ε inducida mediante:

i - $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\vec{B}\cdot\vec{A})}{dt}$ (Expresión general para cualquier caso).

ii - $\varepsilon = \int \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{dl}$ (Expresión deducida para el caso de la espira con varilla móvil, también útil para este caso).

Solución por método i)

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)}{dt}$$

$\vec{B} \parallel \vec{A}$ y $B = cte$:

$$\varepsilon = -B\frac{d\,(A)}{dt} = -B\frac{d\,(A)}{dt}$$

Analizamos una porción de área de circunferencia:

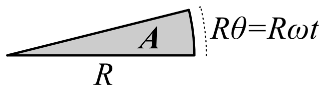

Figura 9.10: Área de porción de circunferencia.

$$arco_{(2\pi)} = 2\pi R$$

$$arco_{(\theta)} = \theta R$$

$$A = \frac{arco_{(\theta)}}{arco_{(2\pi)}}\left(\pi R^2\right) = \frac{\theta R}{2\pi R}\left(\pi R^2\right) = \frac{\theta R^2}{2} = \frac{\omega t R^2}{2}$$

$$\varepsilon = -B\frac{d\,(A)}{dt} = -B\frac{d\left(\frac{\omega t R^2}{2}\right)}{dt} = -B\frac{\omega R^2}{2}$$

$$\varepsilon = -\frac{B\omega R^2}{2}$$

El signo (-) indica que debe considerarse la ley de Lenz y analizar el sentido de la fem calculada de manera tal que se oponga a la causa que la produjo.

Solución por método ii)

$$\varepsilon = \int \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{l} \tag{24}$$

Analizamos cómo varía la velocidad tangencial.

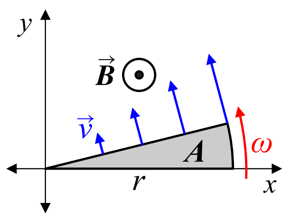

Figura 9.11: Velocidad tangencial.

$$v = f(r) = \omega r$$

Por otro lado:

$$\vec{v}\times\vec{B} = v\,B\,sen(90)\,\hat{\imath} = v\,B\,\hat{\imath}$$

y

$$\vec{dl} = dr\,\hat{i}$$

Reemplazando en 24:

$$\varepsilon = \int \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{dl} = \int \left(v\,B\,\hat{i}\right) \cdot \left(dr\,\hat{i}\right) = \int \left(\omega r\,B\,\hat{i}\right) \cdot \left(dr\,\hat{i}\right)$$

$$\varepsilon = \int_0^R \omega r\,B\,dr = \frac{\omega B R^2}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{\omega B R^2}{2}$$

Como el resultado es positivo, el sentido es el que se consideró para dr, es decir, desde el centro del disco hacia su límite radial R, de manera tal que el sentido de la corriente es la que aparece en el primer esquema.

9.8. Problema

9.8.1. Enunciado

Una bobina plana y rectangular de 50 espiras mide $25cm$ por $30cm$. Está en un campo magnético uniforme de $1,2T$, con el plano de la bobina paralelo al campo. En $t = 0,222s$ se hace girar de manera que el plano de la bobina queda perpendicular al campo.

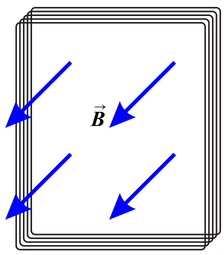

Figura 9.12: Bobina rectangular.

a) ¿Cuál es el cambio en el flujo magnético a través de la bobina debido a esta rotación?
b) Determine la magnitud de la fem media inducida en la bobina durante esta rotación.

9.8.2. Respuesta

a) $\Delta\Phi = 4,5Wb$
b) $\varepsilon = -20,27V$

9.8.3. Solución

a) El flujo magnético a través de la bobina rectangular es función del ángulo entre su vector de área y el vector densidad de flujo mangético $\vec{B}$. En la figura siguiente se observan tres posiciones angulares para valores $0 < \theta < \pi$.

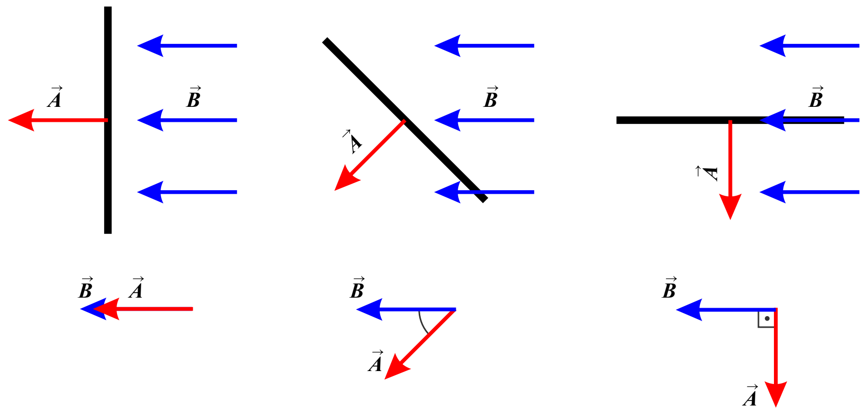

Figura 9.13: Posiciones angulares de la bobina.

El flujo para cada una de las tres posiciones angulares resulta:

$$\theta = 0: \ \Phi = N \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = NBAcos\,(0) = NBA$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}: \ \Phi = N \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = NBAcos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,707NBA$$

$$\theta = \pi: \ \Phi = N \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = NBAcos\,(\pi) = 0$$

Se observa que el flujo tiene una variación máxima al pasar de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$; dicha variación del flujo tiene un valor $\Delta\Phi = NBA$.

$$\varDelta\Phi = NBA = (50)\,(1,2T)\,(0,25m \times 0,3m)$$

$$\varDelta\Phi = 4,5Tm^2 = 4,5Wb$$

b) Para calcular la fem inducida ε haremos uso de la ley de Faraday-Lenz.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Que para este caso podemos tomar, en lugar de su notación diferencial, su notación en función de una variación temporal $\varDelta t$:

$$\varepsilon = -\frac{\varDelta\Phi}{\varDelta t} = -\frac{4,5Wb}{0,222s} = -20,27V$$

Se reitera que el signo negativo corresponde a la ley de Lenz, indicando que esta fem ε originará una corriende inducida sobre la bobina que a su vez dará lugar a un campo magnético $\vec{B_i}$ opuesto al existente; en otras palabras, la fem εinducida es tal que se opone a la causa que la produjo.

9.9. Problema

9.9.1. Enunciado

La corriente en el alambre largo y recto que se ilustra va hacia arriba y se incrementa en forma estable a razón $\frac{di}{dt}$.

a) En el instante en que la corriente tiene un valor genérico i , ¿cuáles son la magnitud y la dirección del campo $\vec{B}$ a una distancia r hacia la derecha del alambre?
b) ¿Cuál es el flujo $d\Phi_B$ a través de la banda angosta y sombreada?
c) ¿Cuál es el flujo total a través de la espira?
d) ¿Cuál es la fem inducida en la espira?
e) Determine el valor numérico de la fem inducida si $a = 12cm$, $b = 36$, $L = 24cm$, y $\frac{di}{dt} = 9,6\frac{A}{s}$.

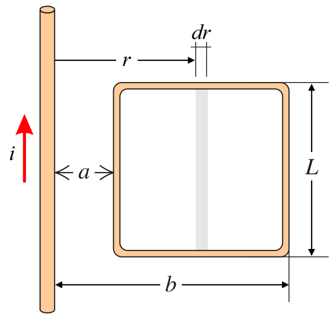

Figura 9.14: Fem inducida en una espira por una corriente variable en el tiempo.

9.9.2. Respuesta

a) $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\varphi}$ en coordenadas cilíndricas.
$\vec{B} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{i}$ en coordenadas cartesianas.
b) $d\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\,L\,dr$
c) $\Phi = \frac{\mu_0 i L}{2\pi}\,ln\left(\frac{b}{a}\right)$
d) $\varepsilon = -\frac{\mu_0 L}{2\pi}\,ln\left(\frac{b}{a}\right)\frac{di}{dt}$
e) $\varepsilon = -506nV = -0,506\mu V$

9.9.3. Solución

a) Se plantea primeramente el sistema de ejes coordenados a utilizar.

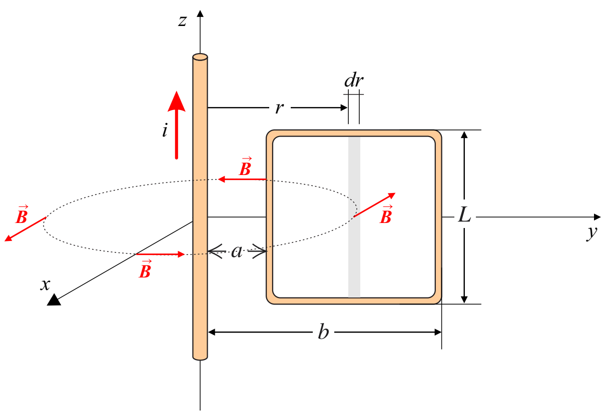

Figura 9.15: Ejes coordenados utilizados para la resolución.

Como se observa en la figura, y por regla de la mano derecha, el vector densidad de flujo magnético $\vec{B}$ tiene la dirección de $\hat{\varphi}$. Para el caso de utilizar coordenadas cartesianas y analizar el campo en un punto ubicado sobre el eje y, eje en el cual se encuentra alineada la espira, la dirección del campo $\vec{B}$ puede expresarse en términos de $\left(-\hat{i}\right)$.

Habiendo aclarado el sistema de ejes a utilizar, para hallar la expresión del campo $\vec{B}$ se aplica la ley de Ampere sobre la trayectoria circular de la figura, de radio r genérico.

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{enc}$$

La corriente encerrada por la trayectoria amperiana utilizada resulta $I_{enc} = i$. A su vez $\vec{B} \parallel \vec{dl}$ sobre toda la trayectoria de integración y, por último, el módulo del vector $\vec{B}$ resulta constante sobre dicha trayectoria, debido a que la distancia a la corriente es siempre el radio de la trayectoria circular. De esta manera la integral de línea cerrada se simplifica notablemente.

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = B \oint dl = B \oint_0^{2\pi} r d\varphi = B\, 2\pi r = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Y en forma vectorial, como se analizó anteriormente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\,\hat{\varphi}$$

O bien

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\left(-\hat{i}\right)$$

b) El flujo magnético sobre el diferencial de área resulta:

$$d\Phi = \vec{B} \cdot \vec{dA}$$

Con $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\left(-\hat{i}\right)$ y $\vec{dA} = Ldr\left(-\hat{i}\right)$. Note que para una superficie abierta la dirección de vector área es arbitraria.

De esta manera se obtiene el diferencial de flujo magnético.

$$d\Phi = \vec{B} \cdot \vec{dA} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\left(-\hat{i}\right) \cdot Ldr\left(-\hat{i}\right)$$

$$d\Phi = \vec{B} \cdot \vec{dA} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} Ldr$$

c) El flujo magnético total sobre la espira resulta de la integración del diferencial de flujo hallado, entre los límites adecuados, es decir, los límites de la espira de altura L y $a < r < b$.

$$\Phi = \int d\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 i}{2\pi r} Ldr = \frac{\mu_0 i}{2\pi} L \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 i L}{2\pi}\, ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

d) La expresión de la fem inducida ε se obtiene aplicando la ley de Faraday-Lenz, es decir, analizando la variación del flujo magnético sobre la espira con respecto al tiempo.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Y dado que la corriente i resulta variable con el tiempo, de acuerdo al enunciado:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_0 iL}{2\pi} \, ln\left(\frac{b}{a}\right)\right] = -\frac{\mu_0 L}{2\pi} \, ln\left(\frac{b}{a}\right)\frac{di}{dt}$$

e) Para los valores $a = 0,12m$, $b = 0,36m$, $L = 0,24m$ y $\frac{di}{dt} = 9,6\frac{A}{s}$, el valor de la fem inducida resulta el siguiente.

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 L}{2\pi} \, ln\left(\frac{b}{a}\right)\frac{di}{dt} = -\frac{\left(4\pi \times 10^{-7}\frac{Wb}{Am}\right)(0,24m)}{2\pi} \, ln\left(\frac{0,36m}{0,12m}\right)\left(9,6\frac{A}{s}\right)$$

$$\varepsilon = -5,06 \times 10^{-7}V = -0,506\mu V$$

9.10. Problema

9.10.1. Enunciado

Se tira hacia la derecha de una barra metálica de $1,5m$ de longitud con velocidad uniforme de $5\frac{cm}{s}$ en dirección perpendicular a un campo magnético uniforme de $B = 0,75T$. La barra corre sobre rieles metálicos paralelos conectados por medio de una resistencia de $R = 25\Omega$. Se puede ignorar la resistencia de la barra y los rieles.

a) Calcule la magnitud de la fem inducida en el circuito.

b) Determine el sentido de la corriente inducida en el circuito

1. con base en la fuerza magnética sobre las cargas en la barra móvil;

2. con base en la ley de Faraday-Lenz

c) Calcule la corriente a través de la resistencia R.

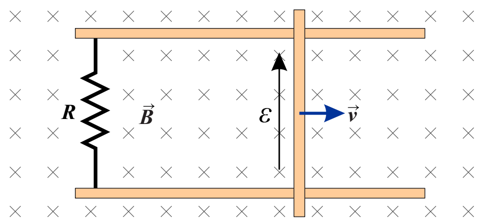

Figura 9.16: Espira de área variable.

9.10.2. Respuesta

a) $\varepsilon = -56,25mV$

b) La fem ε tiene sentido antihorario.

c) $I = 2,25mA$

9.10.3. Solución

a) Para hallar la fem inducida se hace uso de la ley de Faraday.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(\vec{B} \cdot \vec{A}\right)}{dt}$$

Se observa que $\vec{B} \parallel \vec{A} \Rightarrow \vec{B} \cdot \vec{A} = BAcos(0) = BA$ y el área resulta $A = Lx$, siendo x el desplazamiento de la varilla durante un tiempo dt. De esta manera:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}BA = -\frac{d}{dt}BLx = -BL\frac{d}{dt}x = -BLv$$

Expresión hallada anteriormente. Reemplazando valores se obtiene el valor de la fem.

$$\varepsilon = -BLv = -(0,75T)(1,5m)\left(0,05\frac{m}{s}\right) = -56,25mV$$

b) i) Con base en la fuerza magnética.

Dicha fuerza se opondrá al desplazamiento realizado externamente, deducción lógica, ya que el caso opuesto sería el de una fuerza magnética que se origina a sí misma, lo que violaría las leyes de la física conocidas. Siendo $\vec{F}_m = I\vec{L} \times \vec{B}$, y conociendo que la fuerza magnética apunta hacia la izquierda y el campo $\vec{B}$ es entrante a la página, por regla de la mano derecha se deduce que el vector $\vec{L}$ (y por ende la corriente I, que posee igual sentido que la fem inducida) apunta hacia arriba, como se aprecia en el siguiente diagrama vectorial.

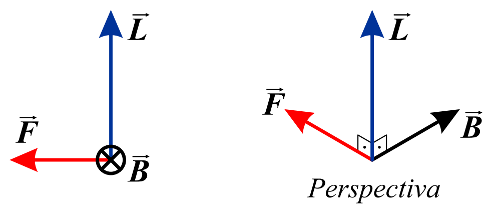

Figura 9.17: Deducción de la dirección de la fem por medios vectoriales.

ii) *Con base en la ley de Lenz, la fem inducida tendrá un sentido tal que se oponga a la causa que la produjo.* Esto es, la fem inducida hará circular una corriente I a través de la espira que a su vez generará un campo magnético B, opuesto al existente, es decir, será un campo B *inducido* y su dirección será *saliente de la página*, por lo que de acuerdo a la regla de la mano derecha aplicada a una espira con corriente, la misma deberá tener sentido *antihorario*, que será el sentido de la fem.

c) La corriente que circula por la espira cuyo valor de resistencia está dado únicamente por la resistencia que forma uno de sus lados puede calcularse mediante la aplicación de la ley de Ohm. Su sentido de circulación será antihorario.

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{56,25mV}{25\Omega} = 2,25mA$$

9.11. Problema

9.11.1. Enunciado

Una espira cuadrada de alambre con arista L y resistencia R se mueve con velocidad constante v a través de un campo magnético uniforme confinado a una región cuadrada cuyos lados miden el doble de longitud que los de la espira cuadrada.

a) Elabore una gráfica de la fuerza externa F necesaria para mover la espira con velocidad constante como función de la coordenada x, de $x = -2L$ a $x = 2L$. (La coordenada x está medida del centro de la región del campo magnético al centro de la espira. Es negativa cuando el centro de la espira está a la izquierda del centro de la región del campo magnético

b) Elabore una gráfica de la corriente I inducida en la espira como función de x. Tome como positivas las corrientes que vayan en sentido antihorario.

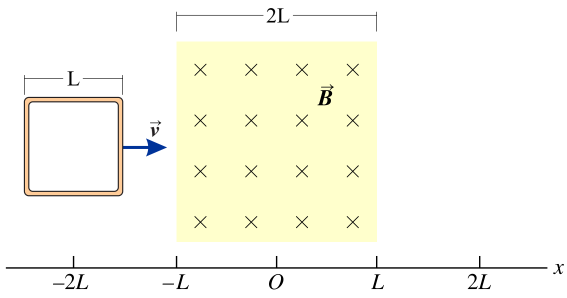

Figura 9.18: Espira cuadrada avanzando sobre un campo uniforme.

9.11.2. Respuesta

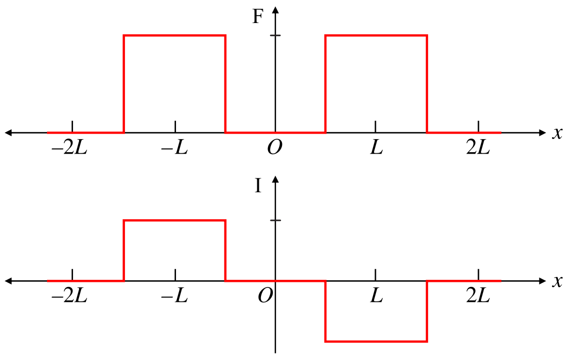

Figura 9.19: Fe I en función de x.

Con valores máximos:
$F_{máx} = \frac{B^2 L^2 v}{R}$
$I_{máx} = \frac{BLv}{R}$

9.11.3. Solución

a y b) Para analizar la fuerza F y la corriente I separaremos el problema en 5 partes, como se aprecia en la siguiente figura, para distintas posiciones de la espira móvil, en 5 instantes de tiempo.

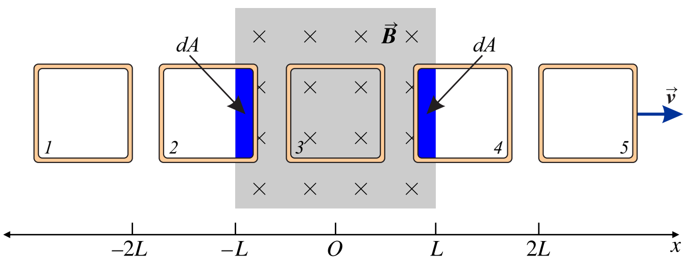

Figura 9.20:

Para todas las zonas se cumple la ley de Faraday-Lenz:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)}{dt}$$

- Zona 1

Dado que la espira se encuentra en una zona donde $B = 0$, el flujo magnético resulta nulo $\Phi = 0$ y también su variación temporal $\frac{d\Phi}{dt} = 0$, por lo cual se concluye que $\varepsilon = 0$. Al no haber fem inducida ε tampoco habrá corriente inducida I sobre la espira, por lo que no aparecerá fuerza magnética sobre ella, con lo que $F = 0$ y $I = 0$.

- Zona 2

En esta zona la espira está *ingresando* a una zona de campo B constante; el área que ingresa a dicha zona se incrementa con el tiempo y por ende existe una variación temporal del flujo magnético $\frac{d\Phi}{dt} = B\frac{dA}{dt} = B\frac{d(Lx)}{dt} = BLv$. Si la velocidad de la espira es constante $v = cte$ se concluye entonces que también lo será la variación temporal del flujo magnético $\frac{d\Phi}{dt} = cte$ y por ende la fem inducida $\varepsilon = cte$, cuyo valor resulta:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -BLv$$

El signo negativo indica que la fem se opone a la causa que la produjo y por ende ella genera una corriente inducida I que generará una variación de flujo magnético opuesto, es decir, generará un campo $B_{inducido}$ opuesto al existente, de manera que por la regla de la mano derecha podemos afirma que dicha corriente tendrá sentido *antihorario*, generando un campo B_{ind} saliente de la página.

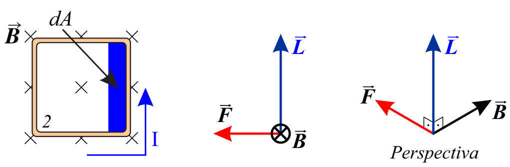

Figura 9.21:

La dirección de la fuerza, como se observa en la figura, puede obtenerse aplicando la ley de la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F}_m = I\vec{L} \times \vec{B}$$

Donde $\vec{B}$ es el campo uniforme de la zona sombreada (no el campo inducido $\vec{B}_{ind}$) y $\vec{L}$ tiene la dirección de circulación de la corriente I.

Se concluye que la fuerza magnética $\vec{F}$ se opone a la fuerza externa que realiza el movimiento de la espira, es decir, tiene dirección opuesta al vector velocidad $\vec{v}$. A su vez, la corriente I tiene sentido antihorario.

- Zona 3

En esta zona la espira se encuentra completamente sumergida en una zona de campo B constante. Al encontrarse por completo dentro de esta zona, no hay variación del área que atraviesa el campo B y por ende, si bien el flujo magnético tiene un valor constante $\Phi = cte$, su variación respecto del tiempo resulta nula $\frac{d\Phi}{dt} = 0$, por lo cual se concluye que $\varepsilon = 0$. Al no haber fem inducida ε tampoco habrá corriente inducida I sobre la espira, por lo que no aparecerá fuerza magnética sobre ella, con lo que $F = 0$ y $I = 0$.

- Zona 4

En esta zona la espira está *saliendo* de la zona de campo B constante; el área que continúa en dicha zona se *reduce* con el tiempo y por ende existe una variación temporal del flujo magnético $\frac{d\Phi}{dt} = B\frac{dA}{dt} = B\frac{d(Lx)}{dt} = -BLv$ (note el agregado del signo negativo representando que la variación de flujo es decreciente con el tiempo). Si la velocidad de la espira es constante $v = cte$ se concluye entonces que también lo será la variación temporal del flujo magnético $\frac{d\Phi}{dt} = cte$ y por ende la fem inducida $\varepsilon = cte$, cuyo valor resulta:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = +BLv$$

El signo ahora positivo indica que la fem genera una corriente inducida I en sentido horario, que generará una variación del flujo magnético opuesta a la que la produjo. Con fines prácticos, a la hora de calcular flujo magnético, hablar de una variación decreciente del área que es atravesada por el campo B equivale a contemplar un área creciente con un campo B de dirección opuesta, como se observa en la siguiente figura.

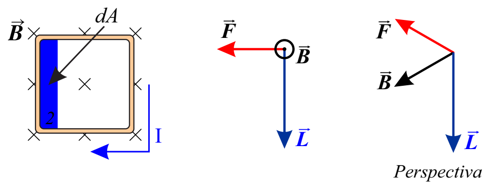

Figura 9.22:

La dirección de la fuerza, como se observa en la figura, puede obtenerse aplicando la ley de la fuerza magnética de un conductor con corriente I sumergido en un campo B:

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

Donde se invirtió la dirección de$\vec{B}$ para compensar la variación decreciente del área con el tiempo. Se verifica que la fuerza magnética continúa apuntando en dirección opuesta al movimiento (como era de esperar) aunque la corriente haya cambiado de sentido.

Se concluye que la fuerza magnética $\vec{F}$ se opone a la fuerza externa que realiza el movimiento de la espira, es decir, tiene dirección opuesta al vector velocidad $\vec{v}$. A su vez, la corriente I tiene sentido *horario*.

- Zona 5

Dado que la espira se encuentra en una zona donde $B = 0$, al igual que en la zona 1, el flujo magnético resulta nulo $\Phi = 0$ y también su variación temporal $\frac{d\Phi}{dt} = 0$, por lo cual se concluye que $\varepsilon = 0$. Al no haber fem inducida ε tampoco habrá corriente inducida I sobre la espira, por lo que no aparecerá fuerza magnética sobre ella, con lo que $F = 0$ y $I = 0$.

Conclusiones:

La fuerza magnética que aparece sobre la espira en movimiento siempre se opone a la fuerza externa que la desplaza.

La corriente I toma sentidos opuestos cuando la espira ingresa o sale de la zona de campo B constante.

Debe analizarse, para llegar a estos resultados, el signo de la variación del flujo magnético $\frac{d\Phi}{dt}$. La ley de Lenz establece que la fem inducida sobre la espira (y por ende la corriente que circule por ella) generará una variación de flujo temporal de signo opuesto. Cuando se tratan áreas que aportan flujo que varían en forma creciente y decreciente con el tiempo pueden surgir dudas con los signos, pero debe quedar claro que *siempre el resultado será el de oponerse a la causa de dicha variación*.

Los resultados finales se resumen en el siguiente gráfico, cuyos valores pueden calcularse mediante:

$$\varepsilon = BLv \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BLv}{R}$$

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} = ILBsen\,(\theta)$$

$$F = ILB = \frac{BLv}{R}LB = \frac{B^2L^2v}{R}$$

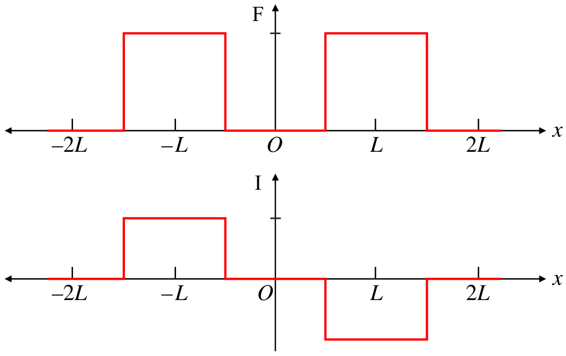

Figura 9.23: $F = f(x)$ y $I = f(x)$

9.12. Problema

9.12.1. Enunciado

Suponga que la espira de la figura se hace girar
a) en torno al eje y;
b) en torno al eje x;
c) en torno al eje z.
¿Cuál es la fem máxima inducida en cada caso si $A = 600cm^2$, $\omega = 35\frac{rad}{s}$ y $B = 0,45T$.

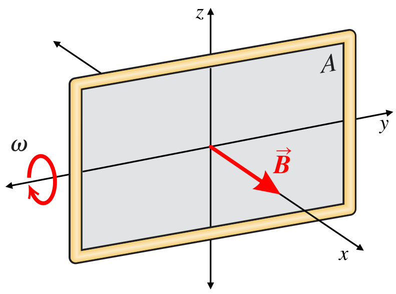

Figura 9.24: Espira rectangular giratoria en un campo B uniforme.

9.12.2. Respuesta

a) en torno al eje y: $\varepsilon = 0,945V$
b) en torno al eje x: $\varepsilon = 0V$
c) en torno al eje z: $\varepsilon = 0,945V$

9.12.3. Solución

Para los tres casos planteados se hará uso de la ley de inducción de Faraday-Lenz para calcula la fem ε inducida en la espira giratoria debida al campo B constate.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)}{dt}$$

Esta ley se aplicará a cada uno de los casos pedidos, que se grafican a continuación.

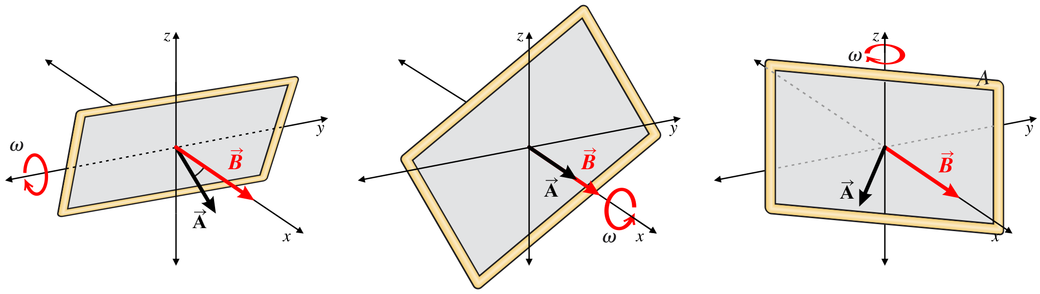

Figura 9.25: Sentido de giro de la espira para cada caso.

a) Giro con respecto al eje y.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)}{dt}$$

se desarrolla el producto escalar entre vectores,

$$\varepsilon = -\frac{d\left(BAcos\left(\theta\right)\right)}{dt}$$

siendo $\theta = \omega t$,

$$\varepsilon = -\frac{d\left[BAcos\left(\omega t\right)\right]}{dt}$$

siendo B y A constantes,

$$\varepsilon = -BA\frac{d\left[cos\left(\omega t\right)\right]}{dt} = -\omega BA - sen\left(\omega t\right)$$

$$\varepsilon = \omega BAsen\left(\omega t\right)$$

ε tendrá du valor máximo cuando la función seno alcance su máximo (1),

$$\varepsilon_{máx} = \omega BA = 35\frac{1}{s}\,0,45T\,0,06m^2$$

$$\varepsilon_{máx} = 0,945V$$

b) Giro con respecto al eje x.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)}{dt}$$

y $\vec{B} \parallel \vec{A}$, resultando en que no hay variación del flujo magnético con el tiempo.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left[BAcos(0)\right]}{dt} = -BA\frac{d\left[1\right]}{dt} = 0V$$

c) Giro con respecto al eje z.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)}{dt}$$

Este caso tiene una resolución idéntica al primer caso, en el que el giro era sobre el eje y; el resultado será entonces la misma variación temporal del flujo magnético, es decir, la misma fem máxima inducida.

$$\varepsilon_{máx} = 0,945V$$

9.13. Problema

9.13.1. Enunciado

Cálculo de autoinductancia.

Para un solenoide de longitud L y sección transversal $A = \pi r^2$ se pide:

a) Halle la expresión de la autoinductancia L del solenoide. Suponga que B es uniforme en toda la sección transversal.

b) Suponga que $N = 500$ espiras, $A = 1cm^2$ y $L = 0,1m$. Calcule el valor del autoinductancia del solenoide para los casos:

i) Núcleo de aire $\mu_r = 1$.

ii) Núcleo de ferrita con $\mu_r = 5000$.

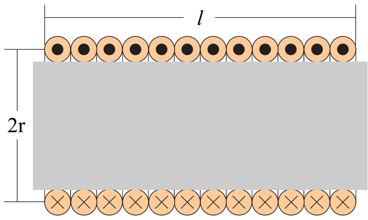

Figura 9.26: Solenoide.

9.13.2. Respuesta

a) $L = \frac{\mu N^2 A}{l}$ con $\mu = \mu_0 \mu_r$

b)

i) $L = 314\mu H$

ii)$L = 1,57H$

9.13.3. Solución

a) La densidad de flujo magnético para el interior de un solenoide ya fue calculada gracias a la ley de Ampere (ec. 16), que se repite a continuación, en valor absoluto, ya que lo supondremos uniforme dentro de todo el solenoide.

$$B = \frac{\mu N I}{l}$$

aplicamos la definición de inductancia,

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)}{I}$$

y dado que $\vec{B} \parallel \vec{A} \Rightarrow \vec{B}\cdot\vec{A} = BAcos(0) = BA$, por lo tanto,

$$L = \frac{NBA}{I}$$

reemplazando por la expresión de B hallada por ley de Ampere,

$$L = \frac{NBA}{I} = \frac{N\left(\frac{\mu N I}{l}\right)A}{I}$$

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 A}{l}$$

b) Sencillamente se reemplazan los valores en la expresión hallada para la inductancia del solenoide.

i)

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 A}{l} = \frac{\left(4\pi \times 10^{-7} \frac{Wb}{Am}\right)(1)(500)^2 \left(10^{-4} m\right)}{(0,1m)} = 314\mu H$$

ii)

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 A}{l} = \frac{\left(4\pi \times 10^{-7} \frac{Wb}{Am}\right)(5000)(500)^2 \left(10^{-4} m\right)}{(0,1m)} = \frac{\pi}{2} H = 1,57H$$

Nótese la dependencia lineal de la inductancia con respecto a la permeabilidad magnética relativa $L \sim \mu_r$ y en forma cuadrática con respecto al número de espiras del solenoide $L \sim N^2$.

9.14. Problema

9.14.1. Enunciado

Cálculo de autoinductancia.

Un solenoide toroidal con área de sección transversal A y radio medio r tiene un devanado compacto con N espiras de alambre alrededor de un núcleo no magnético.

a) Determine su autoinductancia L. Suponga que B es uniforme en toda la sección transversal.

b) Suponga que $N = 200$ espiras, $A = 5cm^2$ y $r = 0,1m$. Calcule el valor del autoinductancia del solenoide.

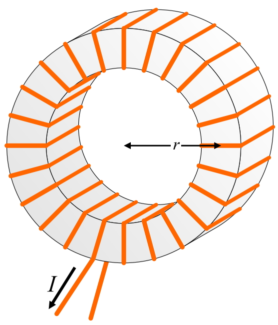

Figura 9.27: Autoinductancia de un toroide.

9.14.2. Respuesta

a) $L = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}$
b) $L = 40\mu H$

9.14.3. Solución

a) El campo magnético B para el toroide fue hallado (ec. 17) que se repite a continuación.

$$B = \frac{\mu N I}{2\pi r}$$

Se aplica la definición de inductancia,

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N\left(\vec{B} \cdot \vec{A}\right)}{I}$$

y dado que $\vec{B} \parallel \vec{A} \Rightarrow \vec{B} \cdot \vec{A} = BAcos(0) = BA$, por lo tanto,

$$L = \frac{NBA}{I}$$

reemplazando B,

$$L = \frac{N\left(\frac{\mu NI}{2\pi r}\right)A}{I}$$

$$L = \frac{\mu N^2 A}{2\pi r}$$

donde $\mu = \mu_0 \mu_r$.

b) Se reemplazan los valores $N = 200$, $A = 5cm^2 = 5 \times 10^{-4} m^2$, $r = 0,1m$, $\mu = \mu_0$:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r} = \frac{\left(4\pi \times 10^{-7} \frac{Wb}{Am}\right)(200)^2 \left(5 \times 10^{-4} m\right)}{2\pi \,(0,1m)}$$

$$L = 40\mu H$$

9.15. Problema

9.15.1. Enunciado

Cálculo de la fem autoinducida.

Si la corriente en el solenoide toroidal del ejercicio anterior se incrementa de manera uniforme de $0A$ a $6A$ en $3\mu s$, calcule la magnitud y sentido de la fem autoinducida.

9.15.2. Respuesta

$\varepsilon = -80V$

9.15.3. Solución

Se parte de la ley de *Faraday-Lenz* para el caso de N espiras:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\varepsilon = -N\frac{d\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)}{dt}$$

que, como se detalla en el ejercicio anterior, $\vec{B} \parallel \vec{A} \Rightarrow \vec{B}\cdot\vec{A} = BAcos(0) = BA$, por lo tanto,

$$\varepsilon = -N\frac{d\,(BA)}{dt}$$

$$\varepsilon = -N\frac{d\,(BA)}{dt}$$

mientras que $B = \frac{\mu NI}{2\pi r}$,

$$\varepsilon = -N\frac{d\left(\frac{\mu NI}{2\pi r}A\right)}{dt}$$

donde sólo la corriente I es dependiente del tiempo, para este caso,

$$\varepsilon = -\frac{\mu N^2 A}{2\pi r}\frac{dI}{dt} = L\frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon = -\left(40 \times \cancel{10^{-6}} H\right)\left(\frac{6A}{3 \times \cancel{10^{-6}} s}\right)$$

$$\varepsilon = -80V$$

El signo $(-)$ indica que la fem autoinducida se opone a la corriente que circula por el inductor, es decir, se opone a la causa que la produjo. Esta fem autoinducida hará circular una corriente en el inductor opuesta a la variación de corriente que se le aplica, por esto es que se dice que el inductor se opone a los cambios de corriente y tanto más se opone cuanto más bruscos (rápidos) sean esos cambios.

9.16. Problema

9.16.1. Enunciado

Almacenamiento de energía en un inductor.

A la industria de generación de energía eléctrica le agradaría encontrar formas eficientes de almacenar los sobrantes de energía producida durante las horas de poca demanda para satisfacer con más facilidad los requerimientos de consumo de sus clientes en los momentos de mucha demanda. Quizá se pudiera emplear un enorme inductor. ¿Qué inductancia se necesitaría para almacenar $1kW\,h$ de energía en una bobina que conduzca una corriente de $200A$?

9.16.2. Respuesta

$L = 180H$

9.16.3. Solución

La energía solicitada es

$$U = 1kW\,h = 1 \times 10^3 W\,60s = 60 \times 10^3 J$$

y como la energía almacenada en el campo magnético de un inductor es

$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

despejando L

$$L = \frac{2U}{I^2} = \frac{2 \times 60 \times 10^3 J}{(200A)^2}$$

$$L = 180H$$

valor de inductancia enorme, dado que además debe poder soportar una corriente de $200A$.

9.17. Problema

9.17.1. Enunciado

Cálculo de la inductancia mutua.

En una forma de bobina de Tesla (un generador de alto voltaje), un solenoide largo con longitud l y área de sección transversal A, tiene un devanado muy compacto con N_1 espiras de alambre. Una bobina con N_2 espiras lo circunda concéntricamente.

a) Deduzca la expresión de la inductancia mutua M.

b) Halle el valor de M para $l = 0,5m$; $A = 10cm^2$; $N_1 = 1000$ espiras; $N_2 = 10$ espiras.

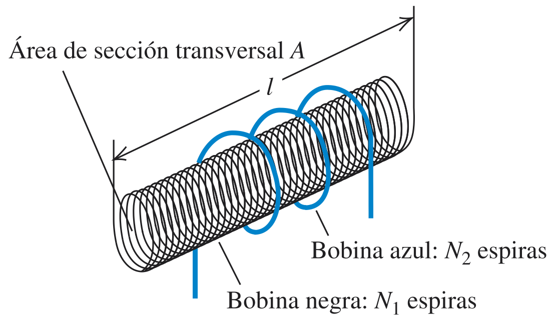

Figura 9.28: Inductancia mutua de una bobina de Tesla.

9.17.2. Respuesta

a) $M = \frac{\mu_0 A N_1 N_2}{l}$
b) $M = 25,13\mu H$

9.17.3. Solución

a) Para el solenoide largo

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$$

El coeficiente de inducción mutua M se calcula mediante

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B_2}}{I_1} = \frac{N_1 \Phi_{B_1}}{I_2}$$

En este caso, el generador de campo B es la corriente I_1 que genera flujo magnético Φ_{B_2} sobre el devanado secundario (corto) de N_2 espiras:

$$M = \frac{N_2}{I_1}\Phi_{B_2} = \frac{N_2}{I_1}(B_1 A_2) = \frac{N_2}{I_1}(\frac{\mu_0 N_1 I_1}{l} A)$$

$$M = \frac{\mu_0 A N_1 N_2}{l}$$

b) Reemplazando valores, $L = 0,5m$, $A = 10cm^2 = 10 \times 10^{-4}m$, $N_1 = 1000$ y $N_2 = 10$

$$M = \frac{\left(4\pi \times 10^{-7}\frac{Wb}{A\cancel{m}}\right)\left(10 \times 10^{-4}\cancel{m^2}\right)(1000)(10)}{(0,5\cancel{m})}$$

$$M = 25,13 \times 10^{-6}\frac{Wb}{A}$$

$$M = 25,13\mu H$$

9.18. Problema

9.18.1. Enunciado

Fem debida a la inductancia mutua.

Para el ejercicio anterior, suponga que la corriente i_2 en la bobina circundante exterior está dada por $2 \times 10^6(\frac{A}{s})t$.

a) En el tiempo $t = 3\mu s$, ¿qué flujo magnético medio a través de cada espira del solenoide es causado por la corriente en la bobina exterior circundante?

b) ¿Cuál es la fem inducida en el solenoide?

9.18.2. Respuesta

a) $\Phi_{B_1} = 15 \times 10^{-6} Wb = 15\mu Wb$
b) $|\varepsilon| = 50,26V$

9.18.3. Solución

a) La corriente es función lineal del tiempo, como se observa en la siguiente figura.

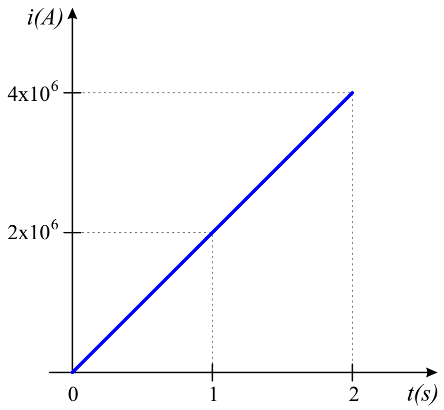

Figura 9.29: $i = f(t)$, *note las distintas escalas de los ejes.*

$$i(t) = 2 \times 10^6\, t \left(\frac{A}{s}\right)$$

Es importante que note que el valor de la expresión representa la pendiente de la recta, es decir, la variación temporal de la corriente con el tiempo. La figura anterior es meramente ilustrativa, ya que como puede apreciar, los ejes poseen escalas muy diferentes *(millones de ampere contra segundos)*. Es posible entonces generar una función de corriente de tal variación, dentro de ciertos límites de corriente máxima.

Para $t = 3\mu s$

$$i(t = 3\mu s) = \left(2 \times 10^6\right) \left(3 \times 10^{-6} \cancel{s}\right) \left(\frac{A}{\cancel{s}}\right)$$

$$i(t = 3\mu s) = 6A$$

De la definición de inductancia mutua M:

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B_2}}{I_1} = \frac{N_1 \Phi_{B_1}}{I_2}$$

se despeja el flujo por espira,

$$\Phi_{B_1} = \frac{M I_2}{N_1}$$

$$\Phi_{B_1} = \frac{\left(25,13 \times 10^{-6} H\right)(6A)}{1000}$$

$$\Phi_{B_1} = 15 \times 10^{-6} Wb = 15\mu Wb$$

b)

$$|\varepsilon| = M \frac{di}{dt}$$

donde

$$\frac{di}{dt} = \frac{di(t)}{dt} = \frac{d\left(2 \times 10^6\, t\, \frac{A}{s}\right)}{dt} = 2 \times 10^6\, \frac{A}{s}$$

con lo que, reemplazando,

$$|\varepsilon| = \left(25,13 \times 10^{-6} H\right)\left(2 \times 10^6\, \frac{A}{s}\right)$$

$$|\varepsilon| = 50,26V$$

9.19. Problema

9.19.1. Enunciado

Análisis de un circuito RL.

Un dispositivo electrónico sensible con resistencia de 175Ω va a conectarse a una fuente de fem por medio de un interruptor. El dispositivo está diseñado para que opere con una corriente de $36mA$, pero, para evitar que sufra daños, la corriente no debe exceder de $4,9mA$ en los primeros $58ms$ después de cerrado el interruptor. Para proteger el dispositivo, se conecta en serie con un inductor, como se ilustra en la figura.

a) ¿Cuál es la fem que debe tener la fuente? Suponga que la resistencia interna es despreciable.
b) ¿Qué inductancia L se requiere?
c) ¿Cuál es la constante de tiempo τ?

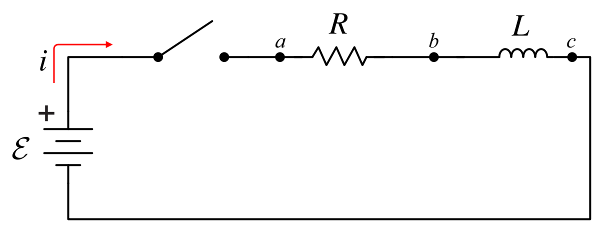

Figura 9.30: Circuito RL

9.19.2. Respuesta

a) $\varepsilon = 6,3V$
b) $L = 69,37mH$
c) $\tau = 396\mu s$

9.19.3. Solución

a) La corriente que circula por el circuito RL mostrado puede obtenerse a partir de la aplicación de la segunda ley de Kirchhoff, considerando las caídas de potencial en sentido opuesto al de circulación de la corriente, impuesta por el generador de tensión.

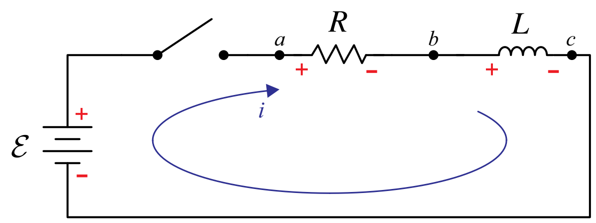

Figura 9.31: Análisis de la malla.

Aplicando entonces la 2da ley de Kirchhoff:

$$\varepsilon - V_R - V_L = 0$$

$$\varepsilon - iR - L\frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} - i\frac{R}{L}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon - iR}{L} = \frac{R}{L}\left(\frac{\varepsilon}{R} - i\right)$$

Separando las variables:

$$\frac{di}{\frac{\varepsilon}{R} - i} = \frac{R}{L}dt$$

$$\frac{di}{i - \frac{\varepsilon}{R}} = -\frac{R}{L}dt$$

Se integra entonces entre los límites convenientes, es decir, para un instante de tiempo t genérico, en el cual la corriente toma un valor i genérico:

$$\int_0^i \frac{di}{i - \frac{\varepsilon}{R}} = \int_0^t -\frac{R}{L}dt$$

$$ln\left(i - \frac{\varepsilon}{R}\right) - ln\left(-\frac{\varepsilon}{R}\right) = -\frac{R}{L}t$$

$$ln\left(\frac{i - \frac{\varepsilon}{R}}{-\frac{\varepsilon}{R}}\right) = -\frac{R}{L}t$$

$$\frac{i - \frac{\varepsilon}{R}}{-\frac{\varepsilon}{R}} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

de donde se obtiene la expresión de la corriente en un circuito RL en función del tiempo.

$$i\,(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Donde $\tau = \frac{L}{R}$ es la constante de tiempo del circuito.
La función $i(t)$ se grafica a continuación.

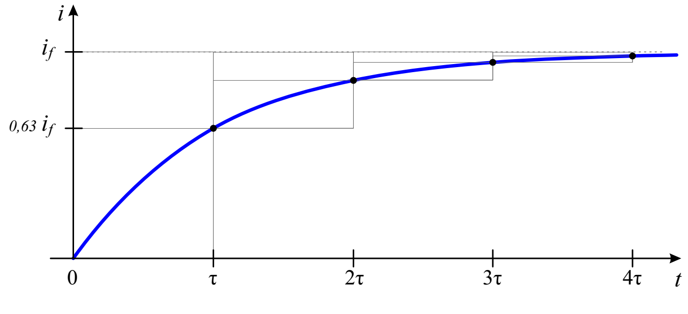

Figura 9.32: Corriente en un circuito RL.

Donde se aprecia que para $t \gg \tau \ \rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R}$

Por lo tanto, si se requiere una corriente final de $36mA$ sobre la carga resistiva de 175Ω, aplicando la ley de Ohm se obtiene la fem ε necesaria.

$$\varepsilon = iR = 36mA\,175\Omega$$

$$\varepsilon = 6,3V$$

b) El valor de la inductancia L debe ser tal que la corriente sea $i(t) = 4,9mA$ en el instante $t = 58ms$, datos con los que se recurre a la expresión de la corriente hallada anteriormente, de donde puede despejarse L.

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$\frac{i(t)\,R}{\varepsilon} = 1 - e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$1 - \frac{i(t)\,R}{\varepsilon} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$ln\left[1 - \frac{i(t)\,R}{\varepsilon}\right] = -\frac{R}{L}t$$

$$L = -\frac{R}{ln\left[1 - \frac{i(t)R}{\varepsilon}\right]}t$$

donde reemplazamos los valores que requiere la carga R y se halla el valor de la inductancia L.

$$L = -\frac{(175\Omega)}{ln\left[1 - \frac{(0,0049A)(175\Omega)}{(6,3V)}\right]}(0,058s)$$

$$L = 69,37mH$$

c)

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$\tau = \frac{69,37mH}{175\Omega} = 396\mu s$$

9.20. Problema

9.20.1. Enunciado

Energía en un circuito RL.

a) Cuando la corriente decae en un circuito RL, ¿qué fracción de la energía almacenada en el inductor se ha disipado después de $2,3$ constantes de tiempo?

9.20.2. Respuesta

a) $\Delta U_{\%} = 99\,\%$

9.20.3. Solución

a) Se analizará la corriente en un circuito RL puro, sin generador, donde la corriente es impuesta por la inductancia, cuya energía almacenada se disipará en forma de calor en la resistencia R debido a la circulación de corriente.

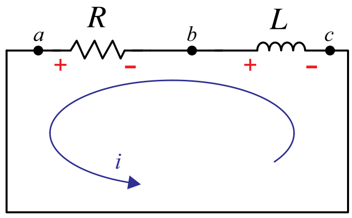

Figura 9.33: Circuito RL, descarga.

Note que en la notación de los signos de la caída de potencial en la resistencia R se mantiene el orden utilizado en el ejercicio anterior, donde se halló la corriente en función del tiempo impuesta por una fuente de tensión. En este caso, puede suponerse que luego de un tiempo dado, en el cual la corriente ha alcanzado su valor final, se retira dicha fuente y en su lugar se coloca un cable, quedando entonces el circuito de la figura. De esta manera, el inductor L, que posee en el instante $t = 0$ *(considerando a este instante el inicio del proceso de "descarga" del inductor)* impondrá la corriente en el circuito, manteniendo el sentido que la diferencia de potencial entre sus bornes indica. De esta manera planteamos la ley de las mallas de Kirchhoff.

$$V_L + V_R = 0$$

$$L\frac{di(t)}{dt} + i(t)R = 0$$

Separando variables:

$$\frac{di(t)}{i(t)} = -\frac{R}{L}dt$$

Considerando que en este proceso de descarga la corriente pasará de un valor máximo I_0 en el instante $t = 0$ a un valor dado$i(t)$ en el instante genérico t, se integra con los límites adecuados.

$$\int_{I_0}^{i} \frac{di(t)}{i(t)} = \int_0^t -\frac{R}{L}dt$$

$$ln[i(t)] - ln(I_0) = -\frac{R}{L}t$$

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Se obtiene entonces la expresión de la corriente en función del tiempo para un circuito RL descargándose.

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

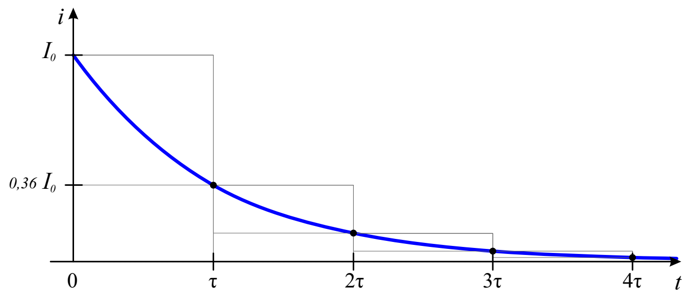

Figura 9.34: Corriente en un circuito RL en descarga.

La energía que almacena un inductor en un dado instante es:

$$U = \frac{1}{2}Li^2$$

La energía que almacena el inductor en el instante inicial $t = 0$, cuando la corriente es I_0 resulta:

$$U_0 = \frac{1}{2}LI_0^2$$

Mientras que para el instante $t = 2,3\tau$ la energía almacenada en el inductor resulta:

$$U_{t=2,3\tau} = \frac{1}{2}L\left[i\left(2,3\tau\right)\right]^2 = \frac{1}{2}L\left[I_0 e^{-\frac{2,3\cancel{\tau}}{\cancel{\tau}}}\right]^2$$

La proporción de la energía almacenada por el inductor en $t = 2,3\tau$ será entonces la relación entre la diferencia de energía inicial en $t = 0$ y la energía en el instante $t = 2,3\tau$, con respecto a la energía inicial en $t = 0$.

$$\Delta U = \frac{\frac{1}{2}LI_0^2 - \frac{1}{2}L\left[I_0 e^{-2,3}\right]^2}{\frac{1}{2}LI_0^2}$$

$$\Delta U = 1 - \left[e^{-2,3}\right]^2$$

$$\Delta U = 0,9899$$

$$\Delta U_{\%} = 99\,\%$$

9.21. Problema

9.21.1. Enunciado

Oscilador.

Una fuente de voltaje de $300V$ se utiliza para cargar un capacitor de $25\mu F$. Una vez que el capacitor está cargado por completo se desconecta de la fuente y se conecta a un inductor de $10mH$. La resistencia en el circuito es despreciable.

a) Determine la frecuencia f y el período T de oscilación en el circuito.

b) Obtenga la carga Q del capacitor y la corriente i en el circuito $1,2ms$ después de haber conectado el inductor y el capacitor.

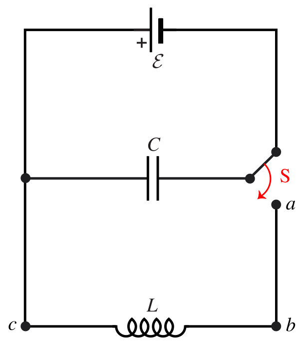

Figura 9.35: Oscilador LC

9.21.2. Respuesta

a) $f = 318,31Hz$
$T = 3,1415ms$
b) $q\,(t = 1,2ms) = 5,53mC$
$i\,(t = 1,2ms) = 1,132A$

9.21.3. Solución

a)

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{10 \times 10^{-3}H\; 25 \times 10^{-6}F}} = 2000\frac{1}{s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2000}{2\pi}\frac{1}{s}$$

$$f = 318,31Hz$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{318,31Hz}$$

$$T = 3,1415ms$$

b) La carga máxima del capacitor, en el instante $t = 0$ es:

$$Q = CV = 25\mu F \times 300V$$

$$Q = 7,5mC$$

Dado que la corriente en un circuito resonante es senoidal, las expresiones para la carga y corriente son:

$$q\,(t) = Q\,cos\,(\omega t)$$

$$i\,(t) = \frac{dq\,(t)}{dt} = -\omega Q\,sen\,(\omega t) = -I\,sen\,(\omega t)$$

Tenga presente que dado que la corriente es alterna, no daremos importancia al signo que arroja la expresión en un dado instante, sino a su valor absoluto.

La carga en el instante $t = 1,2ms$ resulta:

$$q\left(t=1,2ms\right)=7,5mC\,cos\left(2000\frac{1}{s}\,1,2\times10^{-3}s\right)$$

$$q\left(t=1,2ms\right)=-5,53mC$$

El signo indica que la polaridad en el capacitor en ese instante es inversa a la original. El siguiente gráfico de la función $cos\left(\omega t\right)$ da cuenta de ello:

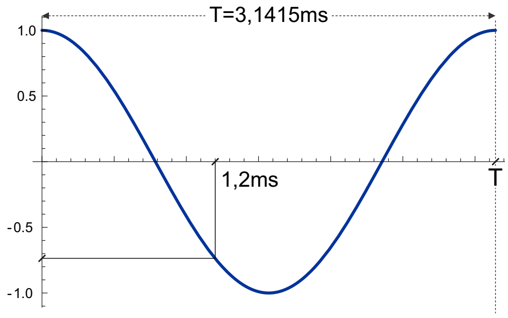

Figura 9.36: Función cosenoidal para la carga q.

La corriente para ese mismo instante resulta entonces:

$$i\left(t=1,2ms\right)=-\omega Q\,sen\left(\omega\,1,2\times10^{-3}s\right)$$

$$i\left(t=1,2ms\right)=-\left(2000\frac{1}{s}\right)\cdot\left(7,5\times10^{-3}\right)\,sen\left(2000\frac{1}{s}\,1,2\times10^{-3}s\right)$$

$$i\left(t=1,2ms\right)=-10,132A$$

El singo menos en el resultado de la corriente indica que el sentido de circulación es opuesto al inicial.

9.22. Problema

9.22.1. Enunciado

Energía en un circuito oscilante.
Considere el circuito LC del ejercicio anterior.
a) Determine las energías magnética y eléctrica en $t=0$, luego de cerrar la llave.
b) Obtenga las energías magnética y eléctrica en $t=1,2ms$.

9.22.2. Respuesta

a) $U\left(t=0\right)=1,125J$
b)$U\left(t=1,2ms\right)=1,125J$

9.22.3. Solución

a) Se analiza la energía electrostática almacenada en el capacitor y la energía magnetostática almacenada en el inductor en ese instante. Téngase en cuenta que la corriente inicial es cero al aplicar la tensión del generador al circuito LC.

$$U_E\left(t\right)=\frac{1}{2}Cv\left(t\right)^2$$

$$U_E\left(t=0\right)=\frac{1}{2}\left(25\mu F\right)\left(300V\right)^2=1,125J$$

$$U_M\left(t\right)=\frac{1}{2}Li\left(t\right)^2$$

$$U_M\left(t=0\right)=\frac{1}{2}\left(10mH\right)\left(0A\right)^2=0J$$

b) Para calcular la energía almacenada en el capacitor en el instante $t=1,2ms$ puede hacerse uso de la relación $C=\frac{q}{v_C}$ ya que el valor de la carga en ese instante fue calculado en el ejercicio anterior, siendo $q=5,53mC$.

$$U_E\left(t\right)=\frac{1}{2}Cv\left(t\right)^2=\frac{1}{2}C\frac{q\left(t\right)^2}{C^2}=\frac{1}{2C}q\left(t\right)^2$$

$$U_E\left(t=1,2ms\right)==\frac{1}{2\left(25\mu F\right)}\left(5,53mC\right)^2=0,605J$$

Para determinar la energía magnetostática almacenada en el instante t=1,2ms haremos uso también de los resultados del ejercicio anterior; en este caso, el valor de la corriente en dicho instante es de $i\left(t=1,2ms\right)=10,132A$.

$$U_M\left(t\right)=\frac{1}{2}Li\left(t\right)^2$$

$$U_M\left(t=1,2ms\right)=\frac{1}{2}\left(10mH\right)\left(10,132A\right)^2=0,513J$$

La energía total del sistema es la suma de ambas, resultado:

$$U\left(t=1,2ms\right)=U_E\left(t=1,2ms\right)+U_M\left(t=1,2ms\right)$$

$$U\left(t=1,2ms\right)=0,605J+0,513J=1,125J$$

Nótese que, como era de esperar, se cumple el principio de conservación de la energía al analizar la energía total del sistema para cualquier instante.

9.23. Problema

9.23.1. Enunciado

Dos bobinas tienen inductancia mutua $M=3,25\times10^{-4}H$. La corriente i_1 en la primera bobina aumenta con una tasa uniforme de $830\frac{A}{s}$.

a) ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en la segunda bobina? ¿Es constante?

b) Suponga que la corriente descrita está en la segunda bobina y no en la primera. ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en la primera bobina?

9.23.2. Respuesta

a) $\varepsilon_2=270mV$, en la bobina 2, constante.

b) $\varepsilon_1=270mV$ en la bobina 1, dado que la inductancia mutua es propiedad compartida por ambas.

9.23.3. Solución

a)

$$\varepsilon_2 = M\frac{di_1}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = \left(3,25 \times 10^{-4}H\right)\left(830\frac{A}{s}\right)$$

$$\varepsilon_2 = 270mV$$

ε_2 es constante ya que $\frac{di_1}{dt}$ lo es.

b) Como la inductancia mutua es una propiedad del conjunto de bobinas, si la variación de corriente se produce en la segunda $\frac{di_2}{dt} = 830\frac{A}{s}$:

$$\varepsilon_1 = M\frac{di_2}{dt} = 270mV$$

9.24. Problema

9.24.1. Enunciado

Para el circuito de la figura, suponga que $E = 60V$, $R = 240\Omega$ y $L = 160mH$. Con el interruptor S_2 abierto, se deja cerrado el S_1 hasta que se establece una corriente constante. Después, se cierra S_2, se abre el S_1, y se retira la batería del circuito.

a) ¿Cuál es la corriente inicial en el resistor, inmediatamente después de haber cerrado S_2 y de abrir S_1?

b) ¿Cuál es la corriente en el resistor en $t = 4 \times 10^{-4}s$?

c) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos b y c en $t = 4 \times 10^{-4}s$? ¿Cuál punto está a un potencial mayor?

d) ¿Cuánto tiempo se requiere para que la corriente disminuya a la mitad de su valor inicial?

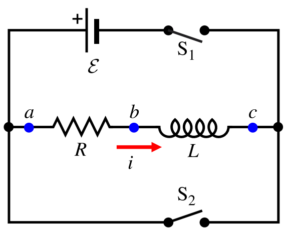

Figura 9.37: Circuito de carga y descarga.

9.24.2. Respuesta

a) $i\,(t = 0) = 250mA$
b) $i\,(t = 400\mu s) = 137mA$
c) $V_{bc} = 32,88V$
d) $t = 462\mu s$

9.24.3. Solución

a)

$$i\,(t = 0) = \frac{V}{E} = \frac{60V}{240\Omega} = 250mA$$

b) $i\,(t) = I_0 e^{-t/\tau}$, con $\tau = \frac{L}{R}\;[s] = \frac{160mH}{240\Omega} = \frac{160m\Omega s}{240\Omega} = \frac{2}{3}ms$
Analizando la expresión para el valor de tiempo solicitado:

$$i\left(t = 400\mu s\right) = \frac{V}{R}e^{-400\mu s/\frac{2}{3}ms}$$

$$i\left(t = 400\mu s\right) = \frac{60V}{240\Omega}e^{-0{,}4ms/\frac{2}{3}ms} = 0,137A$$

c) $V_L + V_R = 0$ (segunda ley de Kirchhoff)
Entonces, calculamos el valor absoluto:

$$V_L(t = 400\mu s) = V_R = i(t = 400\mu s)R = 0,137A \times 240\Omega$$

$$V_L(t = 400\mu s) = 32,88V$$

d)

$$i\left(t\right) = I_0 e^{-t/\tau}$$

Para hallar lo solicitado, se debe cumplir la siguiente igualdad, cuando $i\left(t\right) = 0,5I_0$:

$$0,5I_0 = I_0 e^{-t/\tau}$$

$$0,5 = e^{-t/\tau}$$

$$ln\left(0,5\right) = -\frac{t}{\tau}$$

despejando t:

$$t = -\tau ln\left(0,5\right)$$

$$t = -\frac{2}{3}s\, ln\left(0,5\right)$$

$$t = 462\mu s$$

9.25. Problema

9.25.1. Enunciado

Inductancia de un solenoide.

Un solenoide largo y recto tiene N espiras, área de sección transversal uniforme A y longitud l. Demuestre que la inductancia de este solenoide está dada por la expresión $L = \frac{\mu_0 A N^2}{l}$. Suponga que el campo magnético es uniforme dentro del solenoide e igual a cero en su exterior. (La respuesta será aproximada porque en realidad B es menor en los extremos que en el centro. Por esta razón, la respuesta es en realidad una aproximación en exceso del valor real de la inductancia del solenoide.)

9.25.2. Respuesta

$L = \frac{\mu_0 A N^2}{l}$

9.25.3. Solución

Haciendo uso de la *ley de Ampere* se obtiene la expresión del campo mangético B en el interior del solenoide:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L}$$

Tal campo es uniforme en el interior del solenoide (considerándolo ideal, o bien simplemente analizándolo lejos de los extremos, en la zona central) y tiende a ser nulo en el exterior del solenoide (tanto más cierto cuanto mayor sea la longitud del mismo y la cantidad de espiras). De esta manera el flujo mangético en el interior del solenoide resulta:

$$\Phi_M = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

y como ambos vectores resultan paralelos en el interior del solenoide, el producto escalar se reduce a un simple producto entre escalares:

$$\Phi_M = BA = \frac{\mu_0 N I}{L} A$$

Tomando la definición de inductancia llegamos a lo solicitado:

$$L = \frac{N \Phi_M}{I} = \frac{N}{I} \frac{\mu_0 N I A}{L} = \frac{\mu_0 A N^2}{l}$$

En la expresión final se mantuvo la sección transversal del solenoide como A, pudiendo ser ésta circular, cuadrada o rectangular; para cada caso puede reemplazarse A por la expresión de cada una de esas secciones de ser necesario.

9.26. Problema

9.26.1. Enunciado

Un solenoide de $25cm$ de longitud y área de sección transversal de $0,5cm^2$, contiene 400 espiras de alambre y conduce una corriente de $80A$. Calcule:

a) El campo magnético en el solenoide.

b) La densidad de energía en el campo magnético si el solenoide está lleno de aire.

c) La energía total contenida en el campo magnético de la bobina (suponga que el campo es uniforme).

d) La inductancia del solenoide.

e) La inductancia del solenoide si en lugar de aire, está relleno de acero dulce, cuya permeabilidad relativa es $\mu_r = 2000$.

9.26.2. Respuesta

a) $B = 0,160T = 1600G$
b)$\mu_M = 10185 \frac{J}{m^3}$
c) $U = 0,127J$
d) $L = 40,21\mu H$
e) $L' = 80,42mH$

9.26.3. Solución

a)

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \frac{Wb}{A\,m} \times 400 \times 80A}{0,25m} = 0,160 \frac{Wb}{A\,m} = 0,160T = 1600G$$

Una igualdad de unidades que puede sernos de utilidad se desprende del último cálculo:
$Wb = \frac{T}{m^2}$

b)

$$\mu_M = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2\times 4\pi\times 10^{-7}\frac{Wb}{A\,m}}\left(0,160\frac{Wb}{m^2}\right)^2 = 10185\frac{Wb\,A}{m3} = 10185\frac{J}{m^3}$$

Comprobación de unidades:

$$\frac{Wb\,A}{m^3} = \frac{V\,s\,A}{m^3} = \frac{J\,s\,C}{C\,m^3\,s} = \frac{J}{m^3}$$

La igualdad $Wb = V\,s$ se desprende de la ley de Faraday (puede hallarla para el caso de una espira con varilla móvil en un campo B uniforme y constante.

c)

$$U = \mu_M\,Vol = 10185\frac{J}{m^3}\,0,5cm^2 = 10185\frac{J}{m^3}\,0,5\times 10^{-4}m^2 = 0,127J$$

d)

$$L = \frac{\mu_0 A N^2}{l} = \frac{4\pi\times 10^{-7}\frac{Wb}{A\,m}\,0,5\times 10^{-4}m^2\,400^2}{0,25m} = 40,21\mu H$$

De donde se desprende que $\frac{Wb}{A} = H \Rightarrow \frac{V\,s}{A} = \Omega\,s = H$

Relación que puede resultar de utilidad:

$$H = \Omega\,s$$

e)

$$L' = \mu_r L = 2000\,40,21\mu H = 80,42mH$$

9.27. Problema

9.27.1. Enunciado

Un solenoide está centrado dentro de otro. El solenoide exterior tiene una longitud de $50cm$ y contiene 6750 espiras, mientras que el solenoide interior coaxial mide $3cm$ de largo, $0,12cm$ de diámetro y contiene 15 espiras. La corriente en el solenoide exterior cambia a $37,5\frac{A}{s}$.

a) ¿Cuál es la inductancia mutua de los solenoides?

b) Calcule la fem inducida en el solenoide interno.

9.27.2. Respuesta

a) $M = 0,288H$

b) $|\varepsilon| = 108nV$

9.27.3. Solución

a)

$$M = \frac{N_1\Phi_{B1}}{I_2} = \frac{N_2\Phi_{B2}}{I_1}$$

Entonces:

$$M = \frac{N_1\Phi_{B1}}{I_2} = \frac{N_1\left(B_2\right)A_1}{I_2} = \frac{N_1 A_1}{I_2}\frac{\mu_0 N_2 I_2}{L_2} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A_1}{L_2}$$

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A_1}{L_2} = \frac{4\pi\times 10^{-7}\frac{Wb}{A\,m}\times 15\times 6750\times\pi\left(0,0006m\right)^2}{0,5m}$$

$$M = 0,288\mu H = 288nH$$

b)

$$|\varepsilon| = M\frac{di}{dt} = 288\times 10^{-9}H\times 37,5\frac{A}{s} = 108nV$$

Recordando que $H = \Omega\,s \Rightarrow \Omega\,s\times\frac{A}{s} = V$

9.28. Problema

9.28.1. Enunciado

Cable coaxial.

Un conductor sólido y pequeño, con radio a está sostenido por discos aislantes no magnéticos sobre el eje de un tubo de paredes delgadas con radio interior b. Los conductores interior y exterior transportan corrientes iguales i en sentidos opuestos.

a) Con base en la ley de Ampere, determine el campo magnético en cualquier punto del volumen comprendido entre los conductores.

b) Escriba la expresión para el flujo $d\Phi_B$ a través de una banda angosta de longitud l paralela al eje, de ancho dr, a una distancia r del eje del cable, y que se encuentra en el plano que contiene al eje.

c) Integre su expresión del inciso b) con respecto al volumen comprendido entre los dos conductores para determinar el flujo total producido por una corriente i en el conductor central.

d) Demuestre que la inductancia de un tramo de cable de longitud l es $L = \frac{\mu_0 l}{2\pi ln(\frac{b}{a})}$.

e) Calcule la energía almacenada en el campo magnético para una longitud l de cable.

f) Para los puntos c, d y e, halle el valor correspondiente si los datos del cable coaxial son: $a = 0,2cm$; $b = 0,5cm$; $L = 1m$; $I = 2,5A$; con vacío entre los conductores.

9.28.2. Respuesta

a)$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi}$ $(a < r < b)$siendo $\hat{\varphi}$ el versor propio de la coordenada acimultal de sistema de coordenadas cilíndricas *(equivalente al ángulo polar en notación vectorial en el plano).*

b) $d\Phi_B = B\,dA = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,Ldr$

c) $\Phi_B = \frac{\mu_0 IL}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right)$

d) $L = \frac{\mu_0 L}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right)$

e) $U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 L}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right) I^2$

f)

9.28.3. Solución

a) Este punto ya se ha resuelto por ley de Ampere y es el caso de un conductor rectilíneo con corriente. Los radios de ambos conductores determinan los límites dentro de los cuales la expresión del campo magnético B resulta válida:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi} \ (a < r < b)$$

b)

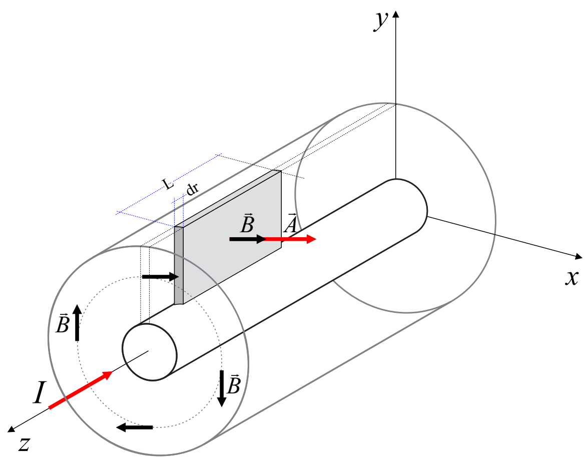

Figura 9.38: Flujo sobre una banda angosta interior al conjunto coaxial.

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B\,dA\,cos\,(0) = B\,dA$$

$$d\Phi_B = B\,dA = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,Ldr$$

c) En base al diferencial de flujo analizado en el punto anterior puede calcularse el flujo en todo el volumen interior, integrando.

$$\Phi_{Total} = \int_{r=a}^{r=b} d\Phi_B = \int_{r=a}^{r=b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,Ldr = \frac{\mu_0 IL}{2\pi}\int_{r=a}^{r=b}\frac{dr}{r}$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 IL}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

d)

$$L = \frac{\Phi_{Total}}{I} = \frac{\mu_0 L}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

e)

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 L}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right) I^2$$

f)

Valor del punto c) $\Phi_B = \frac{\mu_0 IL}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{4\pi\times10^{-7}\frac{Wb}{A\,m}\times2{,}5A\times1m}{2\pi} ln\left(\frac{5}{2}\right) = 458nWb$

Valor del punto d) $L = \frac{\mu_0 L}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{4\pi\times10^{-7}\frac{Wb}{A\,m}\times1m}{2\pi} ln\left(\frac{5}{2}\right) = 183nH$

Valor del punto e) $U = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 L}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right) I^2 = \frac{1}{2}\frac{4\pi\times10^{-7}\frac{Wb}{A\,m}\times1m}{2\pi} ln\left(\frac{5}{2}\right) \times (2,5A)^2 = 573nJ$