7. Electrocinética

7.1. Problema

7.1.1. Enunciado

Un alambre de cobre tiene un diámetro de $1,02mm$, sección transversal de $8,2 \times 10^{-7}m^2$ y transporta una corriente $I = 1,67A$. Calcule:
a) La magnitud del campo eléctrico en el alambre.
b) La diferencia de potencial entre dos puntos del alambre separados por una distancia de $50m$.
c) La resistencia de un trozo de $50m$ de longitud de ese alambre.

7.1.2. Respuesta

a) $E = 0,035\frac{V}{m}$
b) $V = 1,75V$
c) $R = 1,05\Omega$

7.1.3. Solución

a) Se parte de la ley de ohm en forma puntual:

$$E = \rho J$$

$$E = \rho \frac{I}{A}$$

$$E = \left(1,72 \times 10^{-8}\Omega m\right) \frac{(1,67A)}{(8,2 \times 10^{-7}m^2)}$$

$$E = 0,0350\frac{V}{m}$$

b) De acuerdo a la definición de potencial:

$$V = E \cdot l$$

$$V = 0,035\frac{V}{m} \cdot 50m$$

$$V = 1,75V$$

c) De acuerdo a la ley de Ohm:

$$R = \frac{V}{I}$$

$$R = \frac{1,75V}{1,67A}$$

$$R = 1,05\Omega$$

7.2. Problema

7.2.1. Enunciado

Suponga que la resistencia del alambre del ejercicio anterior es $R = 1,05\Omega$ a $20C$ de temperatura. Calcule la resistencia a $0C$ y a $100C$.

7.2.2. Respuesta

a) $R_0 = 0,97\Omega$
b) $R_{100} = 1,38\Omega$

7.2.3. Solución

$$R = R_0\left[1 + \alpha\left(T - T_0\right)\right]$$

a)

$$R_0 = 1,05\Omega\left[1 + \left(0,00393\frac{1}{C}\right)(0C - 20C)\right]$$

$$R_0 = 0,97\Omega$$

b)

$$R_0 = 1,05\Omega\left[1 + \left(0,00393\frac{1}{C}\right)(100C - 20C)\right]$$

$$R_{100} = 1,38\Omega$$

7.3. Problema

7.3.1. Enunciado

Un voltímetro y un amperímetro ideales se colocan en posiciones diferentes de un circuito. ¿Cuáles son las lecturas del voltímetro y del amperímetro en las situaciones que se ilustran en las figuras a y b?

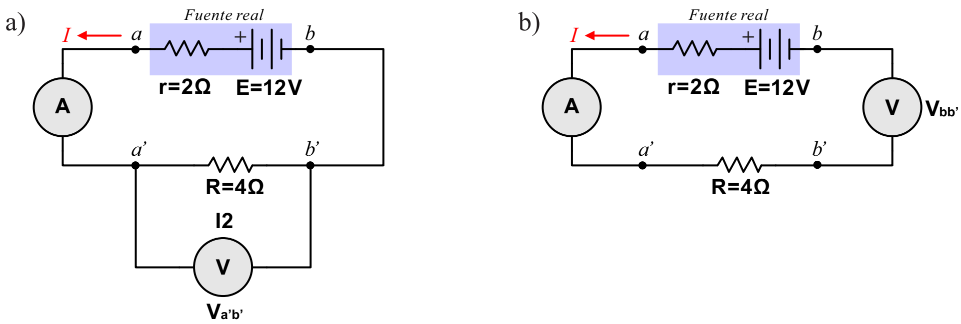

Figura 7.1: Medición de corriente y diferencia de potencial.

7.3.2. Respuesta

a) $V = 8V$ $I = 2A$
b) $V = 12V$ $I = 0A$

7.3.3. Solución

a) El amperímetro indica la corriente del circuito serie conformado por la fuente ε y su resistencia interna $r_\varepsilon = 2\Omega$, la resistencia interna del amperímetro $R_0 = 0\Omega$ y la resistencia externa $R = 4\Omega$ propia del circuito. El valor indicado en el mismo será:

$$I = \frac{V_i}{\sum R_i} = \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon + R_0 + R} = \frac{12V}{2\Omega + 0\Omega + 4\Omega} = 2A$$

El voltímetro se encuentra colocado en paralelo con la resistencia $R = 4\Omega$, por lo que su indicación será la caída de potencial sobre la misma, que resulta:

$$V_R = I \times R = 2A \times 4\Omega = 8V$$

b) Al colocar el voltímetro en serie con el circuito (erróneo), su resistencia interna, tendiendo a infinito, imposibilita la circulación de corriente. Al no haber circulación de corriente no hay caídas de potencial sobre las resistencias y, por ende, el voltímetro indica la diferencia de potencial de la fuente $V = 12V$ y el amperímetro una corriente nula $I = 0A$.

Conclusión: el voltímetro debe conectarse en paralelo con la diferencia de potencial de interés y el amperímetro en serie con el circuito.

7.4. Problema

7.4.1. Enunciado

Dos lámparas idénticas se conectan a una fuente con $\epsilon = 8V$ y resistencia interna despreciable. Cada lámpara tiene una resistencia $R = 2\Omega$. Calcule la corriente a través de cada lámpara, la diferencia de potencial a través de éstas y la potencia total que se les entrega para conexiones serie y paralelo.

a) En serie

b) En paralelo.

c) Suponga que una de las lámparas se funde, es decir, su filamento se rompe y la corriente ya no puede fluir a través de él. ¿Qué pasa con la otra lámpara, para el caso de conexión en serie? ¿Y en el de conexión en paralelo?

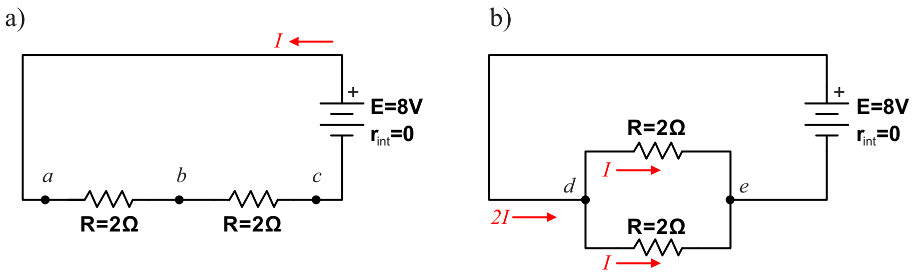

Figura 7.2: Conexiones.

7.4.2. Respuesta

a) $I_{serie} = 2A$
$V_{ab} = V_{cd} = 4V$
$P_{R_1} = P_{R_2} = 8W$
$P_{Total} = 16W$
b) $I_{paralelo} = 4A$
$V_{R_1} = V_{R_2} = 8V$
$P_{R_1} = P_{R_2} = 32W$
$P_{Total} = 64W$
c)

Conexión serie: Al quemarse una lámpara el circuito se abre y la corriente se hace nula; no hay potencia disipada.

Conexión paralelo: Al quemarse una lámpara sólo una malla se abre; por la otra malla circula la misma corriente que existía previo a la ruptura de la lámpara, por lo que la potencia disipada es la misma para esa malla: $P_{Total} = P_{R_2} = 32W$

7.4.3. Solución

a) Como es un circuito serie, la corriente de cada lámpara será igual a la corriente total:
$I_{serie} = \frac{V}{2R} = \frac{8V}{2(2\Omega)} = 2A$

Es un divisor resistivo, por lo que$V_{ab} = V_{cd} = V\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)$
Y dado que $R_1 = R_2 = 2\Omega$:
$V_{ab} = V_{cd} = \frac{V}{2} = \frac{8V}{2} = 4V$

La corriente I circula por ambas resistencias, por lo que:
$P_{R_1} = I^2 R_1 = P_{R2} = I^2 R_2 = \left(\frac{V}{R+R}\right)^2 R = \left(\frac{8V}{4\Omega}\right)^2 2\Omega = 8W$
La potencia total entregada por la fuente será la suma de la potencia disipada por cada resistencia:
$P_{total} = P_{R_1} + P_{R_2} = 8W + 8W = 16W$

b) Como es un circuito paralelo, por cada resistencia circulará una corriente dada por:
$I_{paralelo} = \frac{V}{R} = \frac{8V}{2\Omega} = 4A$

$V_{ab} = V_{cd} = V = 8V$, ya que se están conectadas en paralelo y por ende comparten la diferencia de potencial en sus bornes.

La potencia total entregada por la fuente será la suma de la potencia disipada por cada resistencia:
$P_{Total} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2$ en forma genérica.
Como $R_1 = R_2$ y por ende $I_1 = I_2$ tenemos que:
$P_{R_1} = P_{R_2} = I^2 R = (4A)^2\, 2\Omega = 32W$
$P_{R_1} = 2\left(I_1^2 R_1\right) = 64W$

c) Para la conexión serie, al quemarse una de las lámparas (resistencia), el circuito queda abierto y no circula corriente por el circuito, por lo que la otra lámpara no enciende. La fuente no entrega potencia.

Para la conexión paralelo la corriente que circula por cada resistencia depende únicamente de la tensión aplicada entre sus bornes, por lo que al quemarse una lámpara (abrirse la resistencia) la corriente que circula por la otra lámpara y por ende su potencia disipada se mantienen. La potencia disipada total será la potencia disipada por la resistencia en buen estado, que para este caso simplificado en que ambas tienen el mismo valor será de $32W$.

7.5. Problema

7.5.1. Enunciado

La figura muestra un circuito *puente*. Calcule la corriente que circula por cada resistencia y la resistencia equivalente de la red.

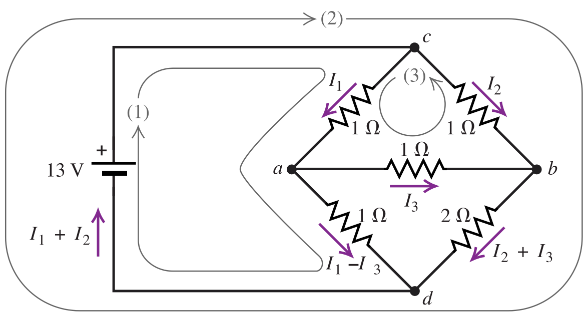

Figura 7.3: Circuito puente.

7.5.2. Respuesta

$I_1 = 6A$

$I_2 = 5A$
$I_3 = -1A$
$R_{eq} = 1,2\Omega$

7.5.3. Solución

Se plantean las ecuaciones de malla (segunda ley de Kirchhoff):
$I)\ 13V - (I_1)\cdot 1\Omega - (I_1 - I_3)\cdot 1\Omega = 0$
$II)\ 13V - (I_2)\cdot 1\Omega - (I_2 + I_3)\cdot 2\Omega = 0$
$III)\ -(I_1)\cdot 1\Omega - (I_3)\cdot 1\Omega + (I_2)\cdot 1\Omega = 0$
De III, despejamos I_2:

$$I_2 = I_1 + I_3 \tag{10}$$

Reescribiendo las primeras dos ecuaciones de malla con esta sustitución se obtiene:
$I)\ 13V - (I_1)\cdot 1\Omega - (I_1 - I_3)\cdot 1\Omega = 0$
$II)\ 13V - (I_1 + I_3)\cdot 1\Omega - (I_1 + I_3 + I_3)\cdot 2\Omega = 0$

$I)\ 13V - 2\,(I_1)\cdot 1\Omega + (I_3)\cdot 1\Omega = 0$
$II)\ 13V - 3\,(I_1)\cdot 1\Omega - 5\,(I_3)\cdot 1\Omega = 0$

Quitando las unidades se obtiene:
$I)\ 13 - 2I_1 + I_3 = 0$
$II)\ 13 - 3I_1 - 5I_3 = 0$

$I)\ 13 = 2I_1 - I_3$
$II)\ 13 = 3I_1 + 5I_3$

Multiplicando la ecuación I por 5 y posteriormente sumando miembro a miembro:
$I)\ 65 = 10I_1 - 5I_3$
$II)\ 13 = 3I_1 + 5I_3$

$78 = 13I_1$
$I_1 = \frac{78V}{13\Omega} = 6A$

Reemplazando en II:
$II)\ 13 = 3\,(6) + 5I_3\ \rightarrow\ I_3 = \frac{(13-18)V}{5\Omega} = -1A$

Y finalmente, haciendo uso de la ecuación 10:
$I_2 = I_1 + I_3 = 6A - 1A = 5A$

Con lo que:

$$I_1 = 6A$$

$$I_2 = 5A$$

$$I_3 = -1A$$

La resistencia equivalente del circuito es la razón entre la diferencia de potencial aplicada y la corriente total que consume el mismo.

$$R_{eq} = \frac{V}{I_{total}} = \frac{V}{I_1 + I_2} = \frac{13V}{11A}$$

$$R_{eq} = 1,2\Omega$$

7.6. Problema

7.6.1. Enunciado

Aplicando las leyes de *Kirchhoff*, deduzca las expresiones de la carga y corriente durante la carga y descarga de un capacitor en un circuito serie RC, como se ve en la figura, suponiendo al capacitor totalmente descargado en el instante en que se cierra el interruptor. Deduzca, además, las expresiones de la diferencia de potencial entre los bornes de dicho capacitor.

Grafique las funciones obtenidas para: $\varepsilon = 10V$; $R = 100k\Omega$; $C = 1\mu F$.

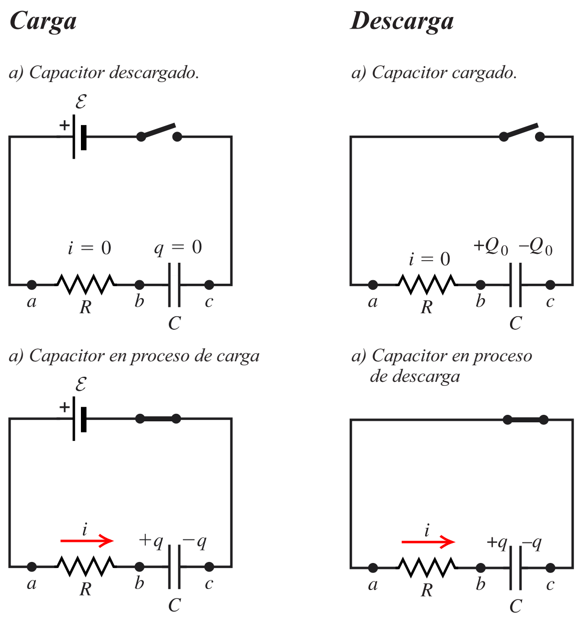

Figura 7.4: Circuitos de conexión (carga) y desconexión (descarga).

7.6.2. Respuesta

Carga de un capacitor en un circuito RC.

$q(t) = Q_f \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) = CV \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$

$i(t) = I_0 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} = \frac{V}{R} \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$

$v_c(t) = V \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$

Descarga de un capacitor en un circuito RC.

$q(t) = Q_f \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} = CV \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$

$i(t) = I_0 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} = \frac{V}{R} \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$ (Tomando la corriente positiva en el sentido horario).

$v_c(t) = V \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$

7.6.3. Solución

- Carga de un capacitor en un circuito RC.

Al cerrar la llave se conforma un circuito serie al que puede aplicarse la segunda ley de Kirchhoff (llamaremos V a la fem ε de la fuente):

$$V - v_R(t) - v_c(t) = 0 \tag{11}$$

$$V - i(t)\, R - \frac{q(t)}{C} = 0$$

Aquí nos detendremos para hacer notar que en el instante inicial $t = 0$, el capacitor se encuentra totalmente descargado y, por ende, $q(t = 0) = 0$, con lo que $i(t = 0) = I_o = \frac{V}{R}$, que será el valor inicial de la corriente para el proceso de carga.

Continuando,

$$i(t) = \frac{V}{R} - \frac{q(t)}{RC}$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{V}{R} - \frac{q(t)}{RC} = -\frac{1}{RC}\left[q(t) - CV\right]$$

$$\frac{dq(t)}{q(t) - CV} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\int_0^q \frac{dq(t)}{q(t) - CV} = \int_0^t -\frac{dt}{RC}$$

$$ln\left(\frac{q(t) - CV}{-CV}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$\frac{q(t) - CV}{-CV} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q(t) - CV = -CV\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q(t) = CV\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

A partir de la expresión de la carga en función del tiempo $q(t)$, puede obtenerse la corriente, derivando.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[CV\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\right]$$

$$i(t) = \frac{d}{dt}\left[CV - CV\,e^{-\frac{t}{RC}}\right] = \frac{CV}{RC}\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{V}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}} = I_0\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

La diferencia de potencial en bornes del capacitor $v_c(t)$ puede obtenerse de la ecuación 11:

$$v_c(t) = V - v_R(t)$$

$$v_c(t) = V - i(t)\,R$$

$$v_c(t) = V - \left(\frac{V}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}}\right)R$$

$$v_c(t) = V\left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right]$$

La relación entre las tres expresiones halladas, $q(t)$, $i(t)$ y $v_c(t)$ puede resumirse graficándolas sobre el mismo eje temporal. Se deja para el lector obtener las expresiones para el proceso de descarga, que también se grafican (preste atención al sentido que le asigna a las corrientes de carga y descarga).

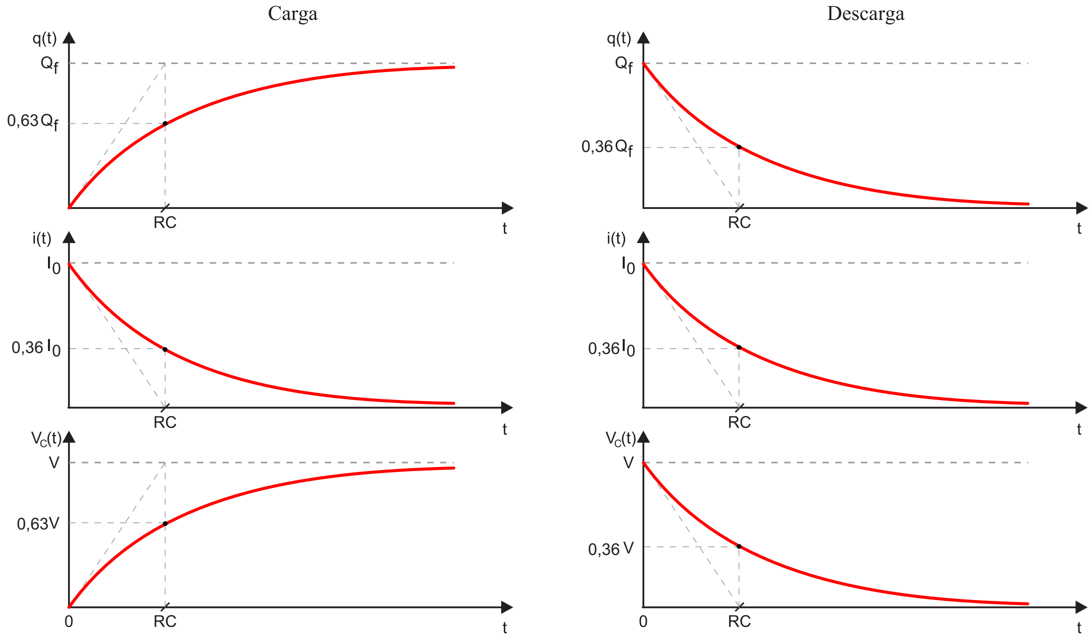

Figura 7.5: Curvas de carga y descarga de un capacitor en un circuito RC.

7.7. Problema

7.7.1. Enunciado

Una resistencia de $10M\Omega$ está conectada en serie con un capacitor cuya capacidad es $1\mu F$ y una batería con *fem* de $12V$. Antes de cerrar el interruptor en el momento $t = 0$, el capacitor se encuentra descargado.

a) ¿Cuál es la constante de tiempo τ ?

b) ¿Qué fracción de la carga final hay en las placas en el momento $t = 46s$?

c) ¿Qué fracción de la corriente inicial permanece en $t = 46s$?

7.7.2. Respuesta

a) $\tau = 10s$

b) $q\,(t = 46s) = 0,99Qf$

c) $i\,(t = 46s) = 0,01I_0$

7.7.3. Solución

a) $\tau = R \cdot C = 10M\Omega \cdot 1\mu F = 10s$

b) Partiendo de la expresión de la carga en función del tiempo hallada en el punto anterior:

$q\,(t) = Q_f \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$

$q\,(t = 46s) = Q_f \left(1 - e^{\frac{-46s}{10s}}\right) = 0,99Q_f$

c) Partiendo de la expresión de la corriente de carga en función del tiempo hallada en el punto anterior:

$i\,(t) = I_0 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$

$i\,(t = 46s) = I_0 \cdot e^{\frac{-46s}{10s}} = 0,01I_0$

7.8. Problema

7.8.1. Enunciado

Para el circuito que se ilustra en la figura, determine la lectura del amperímetro ideal si la batería tiene una resistencia interna de $3,26\Omega$.

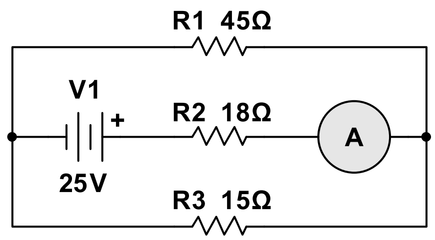

Figura 7.6: Medición de corriente.

7.8.2. Respuesta

$I = 0,769A$

7.8.3. Solución

Las resistencias de 15Ω y 45Ω se encuentra conectadas en paralelo, por lo que conforman una $R_{\parallel}$:

$$R_{\parallel} = \frac{1}{\frac{1}{15\Omega} + \frac{1}{45\Omega}}$$

$$R_{\parallel} = 11,25\Omega$$

$R_{\parallel}$ se encuentra conectada en serie con la resistencia interna de la fuente $R_0 = 3,26\Omega$ y con la resistencia $R = 18\Omega$, por lo que conforman un R_{total}:

$$R_{total} = R_{\parallel} + R_0 = 11,25\Omega + 3,26\Omega + 18\Omega$$

$$R_{total} = 32,51\Omega$$

Por lo que la corriente que indicará el amperímetro para este circuito equivalente serie será:

$$I = \frac{V}{R_{total}} = \frac{25V}{32,51\Omega}$$

$$I = 0,769A$$

7.9. Problema

7.9.1. Enunciado

Tres resistencias de $1,2\Omega$, $2,7\Omega$ y $4,7\Omega$ están conectadas en paralelo a una batería de $28V$ que tiene resistencia interna despreciable.

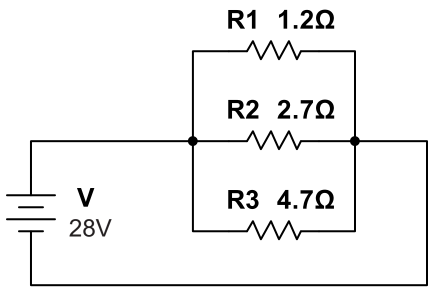

Figura 7.7: Circuito bajo estudio.

Calcule:
a) La resistencia equivalente de la combinación.
b) La corriente en cada resistencia.
c) La corriente total a través de la batería.
d) El voltaje a través de cada resistencia.
e) La potencia disipada en cada resistencia.
f) ¿Cuál resistencia disipa la mayor cantidad de potencia: la de mayor resistencia o la de menor resistencia? Analice su respuesta.

7.9.2. Respuesta

a) $R_{eq} = 0,706\Omega$
b) $I_1 = 23,3A$ $I_2 = 10,37A$ $I_3 = 5,957A$
c) $I_{total} = 39,63A$
d) $V_R = 28$
e) $P_{R_1} = 651,5W$ $P_{R_2} = 280,4W$ $P_{R_3} = 166,8W$
f) La resistencia de menor valor disipará mayor potencia.

7.9.3. Solución

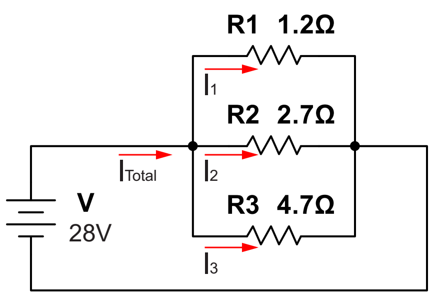

Figura 7.8: Nomenclatura utilizada para resistencias y corrientes.

a) Las tres resistencias están conectadas en paralelo, por lo que la R_{eq} resultará:
$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{1,2\Omega}+\frac{1}{2,7\Omega}+\frac{1}{4,7\Omega}} = 0,706\Omega$
b) Las tres resistencias están conectadas en paralelo, por lo que la diferencia de potencial aplicada a cada una de ellas es la misma, es decir, la tensión de la fuente, $28V$.
$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{28V}{1,2\Omega} = 23,3A$
$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{28V}{2,7\Omega} = 10,37A$
$I_3 = \frac{V}{R_3} = \frac{28V}{4,7\Omega} = 5,957A$
c) La corriente total, entrante al nodo, como se aprecia en la figura, de acuerdo a la primera ley de Kirchhoff, resulta la sumatoria de las corrientes salientes del mismo.

$I_{total} = I_1 + I_2 + I_3 = 23,3A + 10,37A + 5,957A$
$I_{total} = 39,63A$
d) El voltaje aplicado a cada resistencia es el mismo, es decir, el voltaje de fuente, de valor $V = 28V$.
e)
$P_{R_1} = I_1^2 R_1 = (23,3A)^2 (1,2\Omega) = 651,5W$
$P_{R_2} = I_2^2 R_2 = (10,37A)^2 (2,7\Omega) = 280,35W$
$P_{R_3} = I_3^2 R_3 = (5,957A)^2 (4,7\Omega) = 166,78W$
f) La resistencia de menor valor disipará mayor potencia, ya que la misma depende del cuadrado de la corriente y ésta del valor de la resistencia. $P_R = I^2 R = \left(\frac{V}{R}\right)^2 R = \frac{V^2}{R}$. Del último miembro de la igualdad se desprende que a menor R, mayor potencia disipada para igual diferencia de potencial.

7.10. Problema

7.10.1. Enunciado

La potencia nominal de una resistencia es la potencia máxima que ésta puede disipar de forma segura sin que se eleve demasiado la temperatura para no causar daño a la resistencia.
a) Si la potencia nominal de una resistencia de $15k\Omega$ es de $5W$, ¿cuál es la diferencia de potencial máxima permisible a través de los terminales de la resistencia?
b) Una resistencia de $9k\Omega$ va a conectarse a través de una diferencia de potencial de $120V$. ¿Qué potencia nominal se requiere?
c) A través de una diferencia de potencial variable se conectan en serie dos resistencias, una de 100Ω y otra de 150Ω, ambos con potencia nominal de $2W$. ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial que se puede establecer sin que se caliente en exceso ninguna de las resistencias?

7.10.2. Respuesta

a) $V_{máx} = 274V$
b) $P = 1,6W$
c) $V_{máx} = 28,87V$

7.10.3. Solución

a)

$$P = \frac{V^2}{R} \rightarrow V_{máx} = \sqrt{P_{máx} \cdot R} = \sqrt{(5W) \cdot (15000\Omega)}$$

$$V_{máx} = 274V$$

b)

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{(120V)^2}{9K\Omega}$$

$$P = 1,6W$$

c) $I = \frac{V}{R_1 + R_2}$
La corriente sobre ambas resistencias en el circuito serie es la misma.
La potencia disipada por cada resistencia resulta:

$$P_i = I^2 R_i$$

Como la corriente I es compartida por ambas resistencias, la resistencia de mayor valor (150Ω) será la que limite el valor de la tensión aplicada y, por consiguiente, la potencia disipada por cada una. De esta manera:

$$I_{máx} = \sqrt{\frac{P_{R_2}}{R_2}} = \sqrt{\frac{2W}{150\Omega}} = 0,115A$$

$$V_{máx} = I_{máx} \left(R_1 + R_2\right) = 0,115A \left(100\Omega + 150\Omega\right)$$

$$V_{máx} = 28,87V$$

7.11. Problema

7.11.1. Enunciado

Calcule las tres corrientes I_1, I_2 e I_3 que se indican en el circuito en la figura.

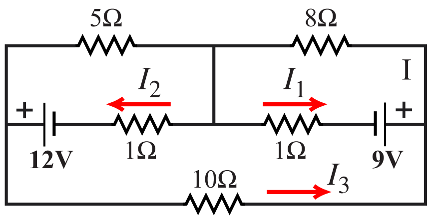

Figura 7.9: Circuito bajo estudio.

7.11.2. Respuesta

$I_1 = 1,02A$
$I_2 = 1,97A$
$I_3 = 0,171A$

7.11.3. Solución

Se asignan primeramente nombres a las mallas y a sus corrientes. Se asigna un sentido para cada corriente de malla.

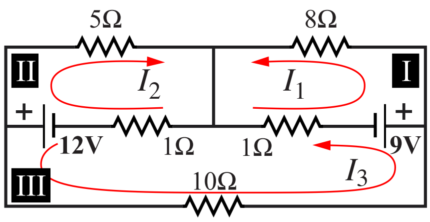

Figura 7.10: Nomenclatura utilizada-

Se escriben las ecuaciones de malla, de acuerdo a la segunda ley de Kirchhoff.
I) $9V - I_1 \cdot 8\Omega - (I_1 - I_3) \cdot 1\Omega = 0$
II) $12V - I_2 \cdot 5\Omega - (I_2 + I_3) \cdot 1\Omega = 0$
III) $12V - I_3 \cdot 10\Omega - 9V - (I_3 - I_1) \cdot 1\Omega - (I_3 + I_2) \cdot 1\Omega = 0$

Se ordenan las ecuaciones agrupando las corrientes.
I) $9V - I_1 \cdot 9\Omega\ + I_3 \cdot 1\Omega = 0$
II) $12V\ - I_2 \cdot 6\Omega - I_3 \cdot 1\Omega = 0$
III) $3V + I_1 \cdot 1\Omega - I_2 \cdot 1\Omega - I_3 \cdot 12\Omega = 0$

Quitando las unidades, por simplicidad, damos lugar al sistema de ecuaciones a resolver.

$$\begin{array}{lllll} 9 & -9\cdot I_1 & +0\cdot I_2 & +1\cdot I_3 & =0 \\ 12 & +0\cdot I_1 & -6\cdot I_2 & -1\cdot I_3 & =0 \\ 3 & +1\cdot I_1 & -1\cdot I_2 & -12\cdot I_3 & =0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} +9\cdot I_1 & +0\cdot I_2 & -1\cdot I_3 & =9 \\ +0\cdot I_1 & +6\cdot I_2 & +1\cdot I_3 & =12 \\ -1\cdot I_1 & +1\cdot I_2 & +12\cdot I_3 & =3 \end{array}$$

La solución del sistema puede hallarse por cualquier método; para este ejemplo utilizaremos la regla de Cramer.

Se calcula primeramente el determinante del sistema Δs:

$$\Delta s = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\Delta s = \{[(9)\cdot(6)\cdot(12)] + [0] + [0]\} - \{[(-1)\cdot(6)\cdot(-1)] + [0] + [(9)\cdot(1)\cdot(1)]\}$$

$$\Delta s = 633$$

Luego, para hallar una dada corriente, se calcula el determinante resultante de reemplazar la columna del determinante de sistema perteneciente a dicha corriente por la columna de términos independientes, hallando los valores ΔI_1, ΔI_2 y ΔI_3.

$$\Delta I_1 = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -1 \\ 12 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\Delta I_1 = 645$$

$$\Delta I_2 = \begin{bmatrix} 9 & 9 & -1 \\ 0 & 12 & 1 \\ -1 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\Delta I_2 = 1248$$

$$\Delta I_3 = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 12 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta I_3 = 108$$

Por último se hallan los valores de las corrientes. En caso de obtener un valor negativo para alguna corriente, tal signo significará que el sentido de circulación de esa corriente es opuesto al establecido al principio del problema.

$$I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta s} = \frac{645}{633} = \frac{215}{211} \Rightarrow I_1 = 1,02A$$

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta s} = \frac{1248}{633} = \frac{416}{211} \Rightarrow I_2 = 1,97A$$

$$I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta s} = \frac{108}{633} = \frac{36}{211} \Rightarrow I_3 = 0,171A$$

7.12. Problema

7.12.1. Enunciado

En el circuito de la figura se mide la corriente que pasa a través de la batería de $12V$ y resulta ser de $70,6mA$ en el sentido que se indica. ¿Cuál es el voltaje V_{ab} de la batería de $24V$? Nota: los recuadros encierran las fuentes reales, incluyendo su resistencia interna.

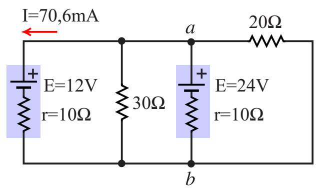

Figura 7.11: Circuito bajo estudio.

7.12.2. Respuesta

$V_{ab} = 12,706V$

7.12.3. Solución

La diferencia de potencial V_{ab} es compartida por la conexión en paralelo entre ambas fuentes reales. Por esto, puede escribirse:

$$V_{ab} = 12V + 70,6mA \cdot 10\Omega$$

$$V_{ab} = 12,706V$$

7.13. Problema

7.13.1. Enunciado

El circuito que se aprecia en la figura, conocido como puente de *Wheatstone*, se utiliza para determinar el valor de una resistencia desconocida X por comparación con tres resistencias M, N y P cuyas resistencias se pueden modificar. Para cada arreglo, cada resistencia se conoce con precisión. Con los interruptores K_1 y K_2 cerrados, estas resistencias se modifican hasta que la corriente en el galvanómetro G sea igual a cero, entonces, se dice que el puente está equilibrado.

a) Demuestre que en esta condición la resistencia desconocida está dada por $X = \frac{MP}{N}$. (*Este método permite una precisión muy elevada al comparar resistencias*) .

b) Si el galvanómetro G muestra una desviación nula cuando $M = 850\Omega$, $N = 15\Omega$ y $P = 33,48\Omega$, ¿cuál es la resistencia desconocida X?

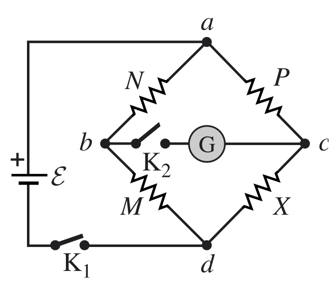

Figura 7.12: Puente de Wheatstone.

7.13.2. Respuesta

a) $X = \frac{MP}{N}$
b) $X = 1897\Omega$

7.13.3. Solución

a)
Para la condición de equilibrio, es decir, cuando el galvanómetro indique corriente nula a través de él, que equivale a mantener abierta la llave K_2. Así, podemos definir las corrientes I_1 e I_2 como se muestra en el siguiente esquema.

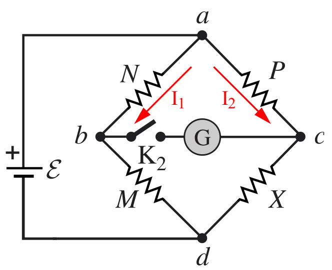

Figura 7.13: Puente de Wheatstone en equilibrio.

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{N+M}$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{P+X}$$

Debido al equilibrio $I_g = 0$, podemos afirmar que los puntos b y c se encuentra a un mismo potencial, lo que es decir:

$$V_{bd} = V_{cd}$$

$$I_1 \cdot M = I_2 \cdot X$$

$$\varepsilon\frac{M}{N+M} = \varepsilon\frac{X}{P+X}$$

$$M \cdot (P+X) = X \cdot (N+M)$$

$$M \cdot P + M \cdot X = X \cdot N + X \cdot M$$

$$M \cdot P = X \cdot N$$

$$X = \frac{M \cdot P}{N}$$

b) Reemplazando valores obtenemos:

$$X = \frac{M \cdot P}{N} = \frac{(850\Omega) \cdot (33,48\Omega)}{(15\Omega)}$$

$$X = 1897\Omega$$

7.14. Problema

7.14.1. Enunciado

Para el circuito de la figura y mediante la aplicación de los teoremas de Thévenin y Norton, según sea conveniente, halle el valor de las corrientes I_1, I_2 y I_3, así como su sentido. Determine la diferencia de potencial entre los puntos a y b, V_{ab}.

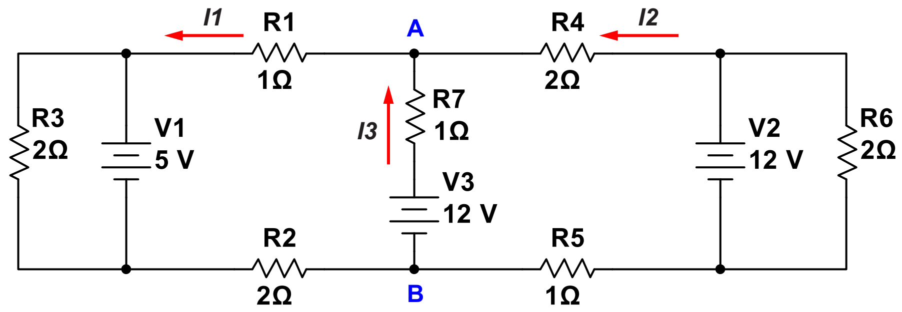

Figura 7.14: Circuito bajo estudio.

7.14.2. Respuesta

$I_1 = 1,866A$

$I_2 = 1,4A$

$I_3 = 0,466A$

$V_{ab} = 10,6V$

7.14.3. Solución

Se comienza por reducir el circuito mediante la aplicación del teorema de Thévenin, hacia ambos lados de los puntos a y b, abriendo el circuito en los puntos grisados como se muestra en la figura.

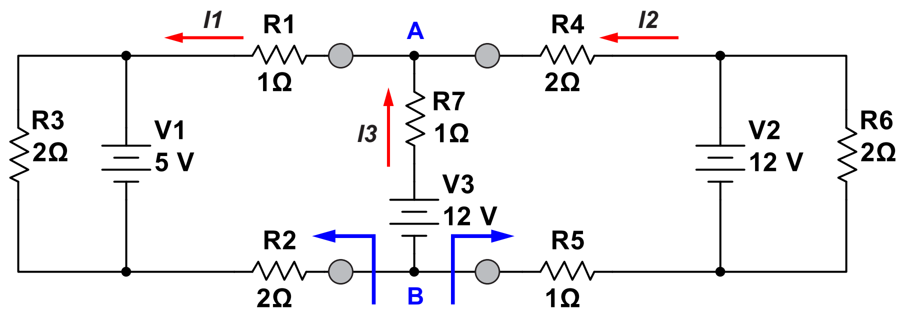

Figura 7.15:

De esta manera se pretende simplificar cada uno de los circuitos resultantes, que se muestran a continuación, por un circuito formado por una fuente de tensión de Thévenin y una resistencia equivalente serie.

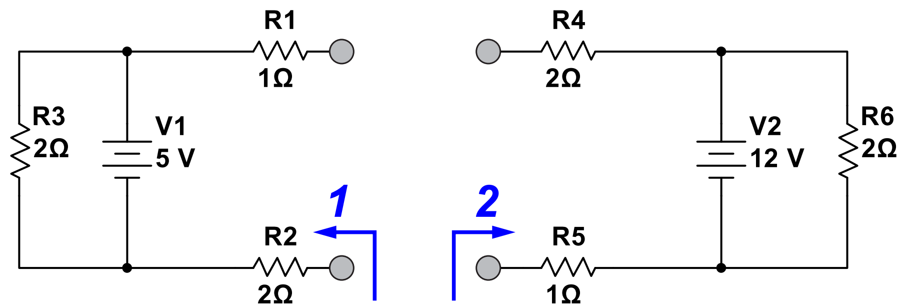

Figura 7.16:

Para el circuito de la izquierda (1), aplicamos el Teorema. El valor de la V_{th} será la diferencia de potencial entre los puntos grisados a circuito abierto. La resistencia equivalente de Thévenin es la resultante de pasivar la fuente de tensión, cortocircuitándola (reemplazándola por su resistencia interna) y analizando el valor de resistencia que se mide entre los bornes grisados. Nótese como la resistencia R_3 queda anulada al cortocircuitar la fuente. De esta manera:

$V_{th1} = 5V$

$R_{th1} = R_1 + R_2 = 3\Omega$

Para el circuito de la derecha (2) el análisis es el mismo y se desprenden los valores:

$V_{th2} = 12V$

$R_{th2} = R_1 + R_2 = 3\Omega$

De esta manera podemos volver a dibujar el primer circuito equivalente, reducido en gran parte.

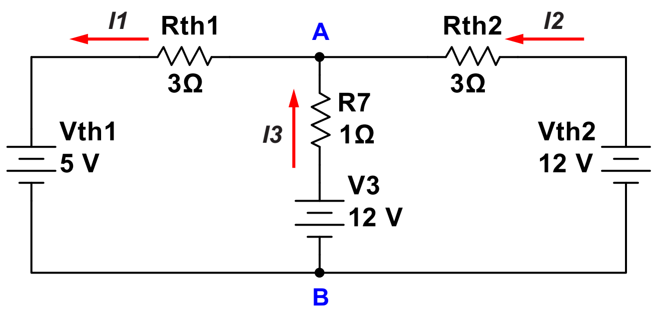

Figura 7.17: Circuito equivalente, luego de aplicar el teorema de Thévenin.

Para hallar los valores de las corrientes puede aplicarse el método de mallas o bien continuar con el método de circuitos equivalentes de Thévenin y Norton, que es el camino que seguiremos en este ejercicio.

El valor de cada una de las corrientes podría deducirse fácilmente si conociéramos el valor del potencial del punto a respecto del potencial respecto del punto b, ya que luego bastaría con aplicar la ley de Ohm convenientemente en cada rama del circuito. Como el punto b será nuestra referencia de potencial, le colocaremos el símbolo de tierra, que representa el nivel de referencia de potencial nulo. A su vez, se mostrará el mismo circuito dibujado en forma alternativa, para facilitar la comprensión del paso siguiente.

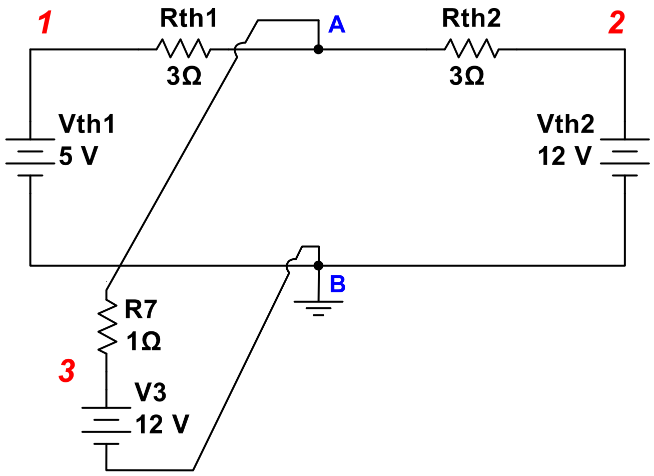

Figura 7.18: Circuito equivalente, luego de aplicar el teorema de Thévenin.

En el circuito se observa que tres ramas similares, cada una compuesta por una fuente de tensión en serie con una resistencia, se conectan en paralelo en los puntos a y b. Para conocer V_{ab} aplicaremos el teorema de Norton a cada una de estar tres ramas, pasando de una fuente de tensión con una resistencia en serie a una fuente de corriente con una resistencia en paralelo. Las ramas están denotadas con números rojos. Para este análisis, se separan las ramas y se analiza cada una bajo la condición de cortocircuito.

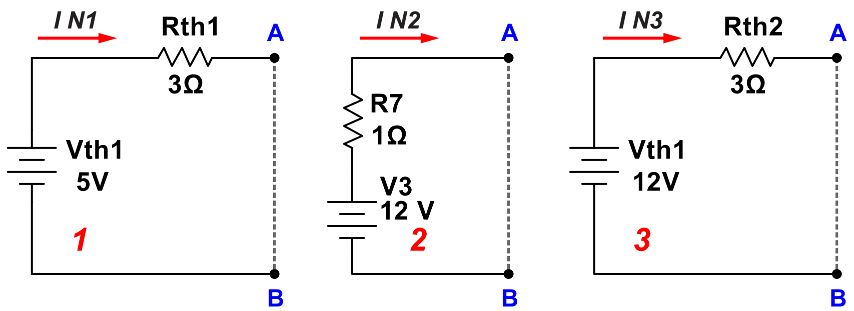

Figura 7.19: Análisis de ramas en paralelo.

Las corrientes I_N son las corrientes de cortocircuito, obtenidas al puentear los puntos a y b.

Rama 1:

$I_{N1} = \frac{V_{th1}}{R_{th1}} = \frac{5V}{3\Omega} = 1,66A$

$R_{N1} = R_{th1} = 3\Omega$

Rama 2:

$I_{N2} = \frac{V_3}{R_7} = \frac{12V}{1\Omega} = 12A$

$R_{N2} = R_7 = 1\Omega$

Rama 3:

$I_{N3} = \frac{V_{th2}}{R_{th2}} = \frac{12V}{3\Omega} = 4A$

$R_{N3} = R_{th2} = 3\Omega$

De esta manera, podemos dibujar el siguiente circuito equivalente.

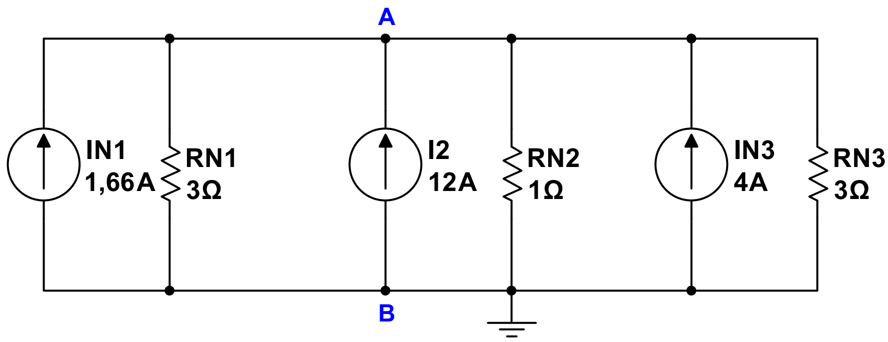

Figura 7.20: Circuito equivalente, luego de aplicar el teorema de Thévenin.

De acuerdo a la ley de Ohm, obtenemos V_{ab}.

$$V_{ab} = (I_{N1} + I_{N2} + I_{N3}) \cdot R_{total}$$

$$V_{ab} = (I_{N1} + I_{N2} + I_{N3}) \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{R_{N1}} + \frac{1}{R_{N2}} + \frac{1}{R_{N3}}} \right)$$

$$V_{ab} = (1,66A + 12A + 4A) \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{3\Omega}} \right)$$

$$V_{ab} = 10,6V$$

Conociendo el valor de V_{ab} y retomando el circuito equivalente de la Figura 7.17, calculamos las corrientes.

I_1 :

$$I_1 = \frac{V_{ab} - V_{th1}}{R_{th1}} = \frac{10,6V - 5V}{3\Omega} \Rightarrow I_1 = 1,866A$$

I_2 :

$$V_3 - I_2 R_7 = V_{ab}$$

$$I_2 = \frac{V_3 - V_{ab}}{R_7} = \frac{12V - 10,6V}{1\Omega} \Rightarrow I_2 = 1,4A$$

I_3 :

$$I_3 = \frac{V_{th2} - V_{ab}}{R_{th2}} = \frac{12V - 10,6V}{3\Omega} \Rightarrow I_3 = 0,466A$$

Dado que los valores obtenidos son positivos y fueron analizados en base al sentido que se eligió a priori para las corrientes, tales sentidos son correctos. Para el caso de obtenerse valores negativos para una o más corrientes, bastará con saber que su sentido de circulación es opuesto al impuesto al comienzo del ejercicio.

7.15. Problema

7.15.1. Enunciado

Para el circuito de la figura se pide hallar, aplicando los teoremas de Thévenin y/o Norton, la constante de tiempo de carga del capacitor, al cerrar la llave. ¿Qué diferencia de potencial se medirá entre bornes del capacitor luego de varias constantes de tiempo?

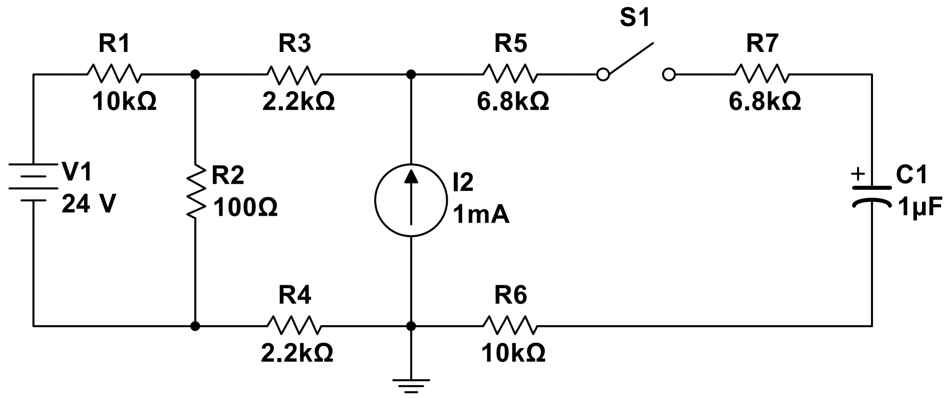

Figura 7.21: Circuito bajo estudio.

7.15.2. Respuesta

$V_{C_1(final)} = 4,74V$

7.15.3. Solución

Para el estudio de la constante de tiempo de carga del capacitor, se reducirá el circuito aplicando los teoremas de Thévenin y Norton, por partes. Se comienza aplicando Thévenin a la parte del circuito que se encuentra hacia la izquierda de los puntos grisados del gráfico siguiente.

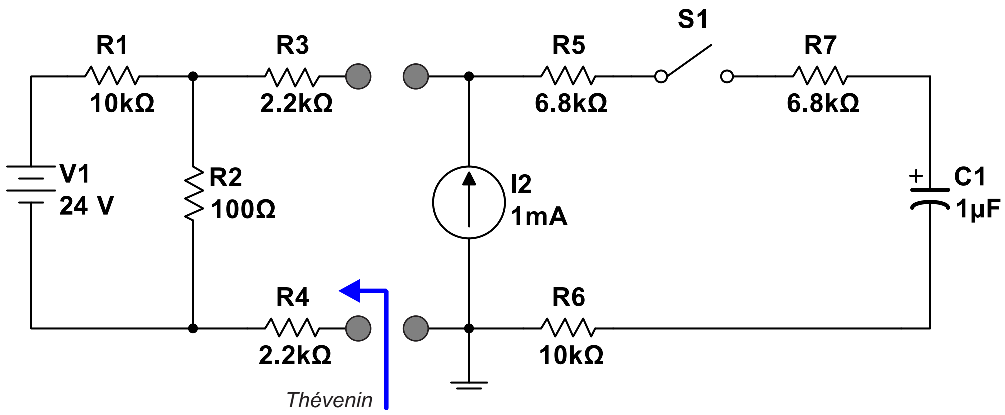

Figura 7.22: Puntos para aplicación del teorema de Thévenin.

La aplicación del teorema de Thévenin implica considerar la parte del circuito a reducir desconectada del resto del circuito, como se ve en la figura. Esa parte del circuito será reemplaza entonces por su equivalente, una fuente de tensión equivalente V_{th} en serie con una resistencia equivalente R_{th}. La tensión de Thévenin equivalente V_{th} será la diferencia de potencial entre los bornes grisados a circuito abierto y la resistencia equivalente de Thévenin R_{th} será la que mediríamos entre dichos bornes al pasivar la fuente de tensión V_1, reemplazándola por su resistencia interna, que es un cortocircuito. De esta manera hallamos los valores:

$V_{th1} = V_1 \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right) = 24V \left(\frac{100\Omega}{10k\Omega+100\Omega}\right) = 0,238V$

$R_{th1} = R_3 + (R_1 \parallel R_2) + R_4 = 2,2k\Omega + (10k\Omega \parallel 100\Omega) + 2,2k\Omega \simeq 4,5k\Omega$

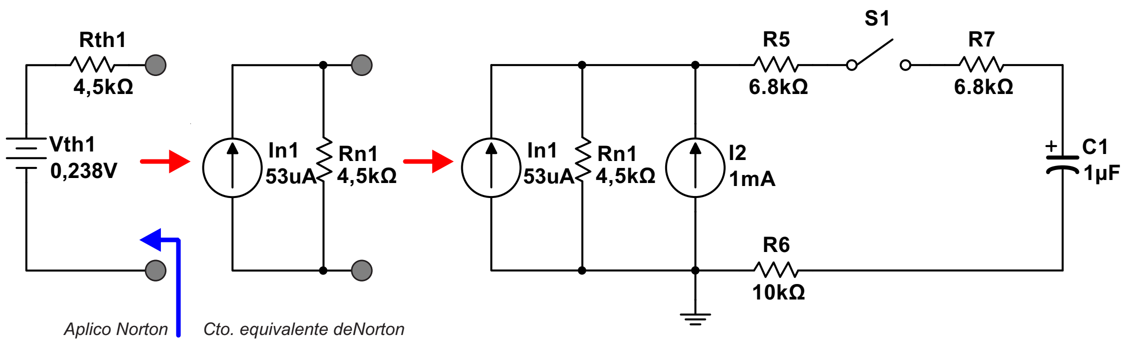

Figura 7.23: Pasaje de equivalente serie a paralelo.

En la figura vemos, a la izquierda, el circuito equivalente hallado por Thévenin. El mismo puede ser convertido gracias al teorema de Norton en un circuito paralelo conformado por una fuente de corriente (corriente equivalente de Norton) y una resistencia en derivación (resistencia equivalente de Norton). La corriente de Norton será la resultante de cortocircuitar los bornes grisados, es decir:

$I_{N1} = \frac{V_{th1}}{R_{th1}} = \frac{0{,}238V}{4{,}5k\Omega} \simeq 53\mu A$

Mientras que la resistencia equivalente de Norton será la hallada por el método de Thévenin:

$R_{N1} = R_{th1} = 4{,}5k\Omega$

Este circuito equivalente de Norton, que aparece ilustrado en el medio de la figura anterior puede ahora ser conectado al resto del circuito, dando lugar al circuito completo que aparece a la derecha de la figura. Las fuentes de corriente, conectadas en paralelo, pueden agruparse en una sola, sumando sus corrientes: $I_{p1} = I_{N1} + I_2$. De esta manera obtenemos el siguiente circuito.

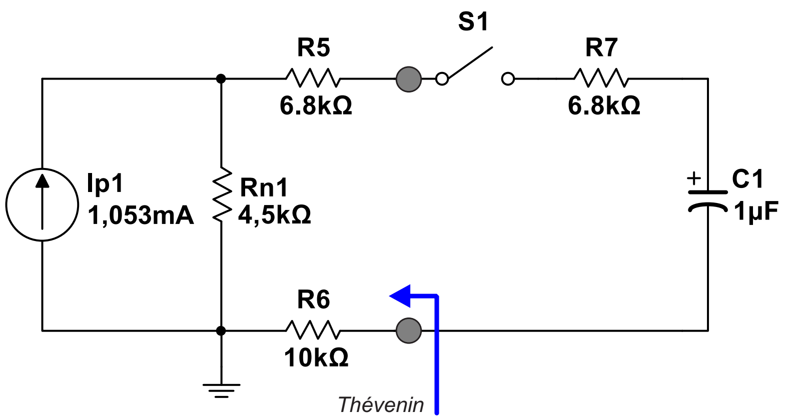

Figura 7.24: Circuito equivalente.

Sobre este circuito equivalente aplicaremos nuevamente el teorema de Thévenin hacia la izquierda de los puntos marcados:

$V_{th2} = I_{p1} R_{N1} = 1{,}053mA \cdot 4{,}5k\Omega = 4{,}7385V \simeq 4{,}74V$

Para hallar la resistencia equivalente de Thévenin se reemplaza la fuente de corriente por su resistencia interna ideal, que es infinita (un circuito abierto).

$R_{th2} = R_5 + R_{N1} + R_6 = 6{,}8k\Omega + 4{,}5k\Omega + 6{,}8k\Omega = 18{,}1k\Omega$

Dando lugar al siguiente circuito equivalente.

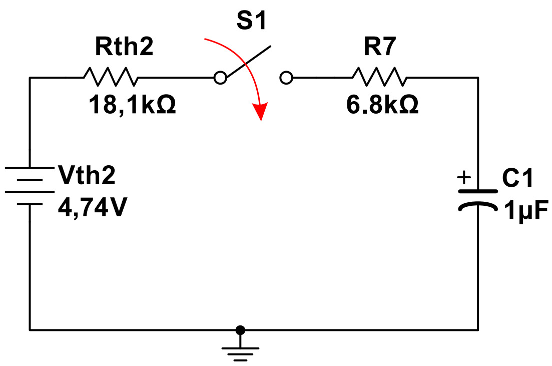

Figura 7.25: Circuito equivalente.

Al cerrar la llave S_1 las resistencias quedan conectadas en serie entre sí y en serie con el capacitor, por lo que podemos agrupar:

$R_{s2} = R_{th2} + R_7 = 18,1k\Omega + 6,8k\Omega = 24,9k\Omega$

Obteniendo el circuito equivalente final, totalmente reducido.

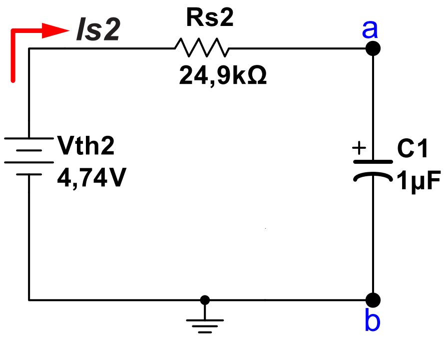

Figura 7.26: Circuito equivalente.

Sobre este circuito se puede ahora calcular la constante de tiempo de carga y descarga del capacitor C_1:

$\tau = R_{s2} \cdot C_1 = 24,9k\Omega \cdot 1\mu F = 24,9ms$

El capacitor C_1 se cargará luego de varias constantes de tiempo con el valor de la fuente que lo carga, que como se aprecia en el circuito equivalente es la fuente V_{th2}:

$$V_{C_1(final)} = V_{th2} = 4,74V$$