

4. Ley de Coulomb, Campo Eléctrico

4.1. Problema

4.1.1. Enunciado

En las esquinas de un triángulo equilátero existen tres cargas puntuales, fijas, como se ve en la figura, cuyos valores son: $q_1 = 2\mu C$, $q_2 = -4\mu C$ y $q_3 = 7\mu C$. Calcule la fuerza eléctrica total sobre la carga q_3 . Calcule el campo eléctrico en el punto en el cual se encuentra la carga q_3 , en ausencia de la misma.

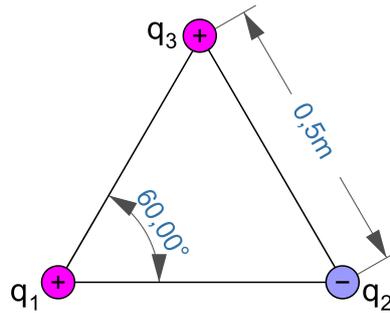


Figura 4.1: Triángulo de cargas.

4.1.2. Respuesta

$$F = 0,872N \text{ (} 330^\circ \text{)}$$

4.1.3. Solución

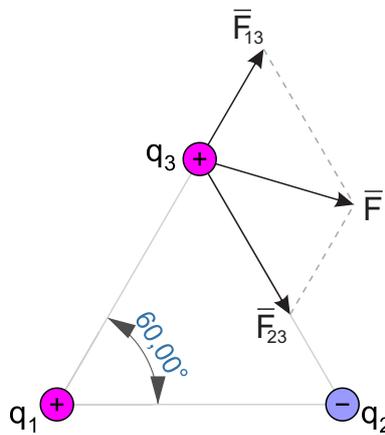


Figura 4.2: Fuerzas sobre la carga.

Se obtienen los módulos de las fuerzas sobre la carga q_3 y luego se suman vectorialmente para hallar la fuerza total aplicada a la misma.

$$F_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r^2} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(2\mu\text{C})(7\mu\text{C})}{(0,5\text{m})^2} = 0,503\text{N}$$

$$F_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r^2} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(4\mu\text{C})(7\mu\text{C})}{(0,5\text{m})^2} = 1,01\text{N}$$

$$F_x = 0,503N \cos 60^\circ + 1,01N \cos 60^\circ = 0,755N$$

$$F_y = 0,503N \sin 60^\circ - 1,01N \sin 60^\circ = -0,436N$$

$$\vec{F} = (0,755N)\hat{i} - (0,436N)\hat{j} = 0,872N(330^\circ)$$

4.2. Problema

4.2.1. Enunciado

Dos esferas pequeñas con cargas positivas $3q$ y q están fijas en los extremos de una varilla aislante horizontal, que se extiende desde el origen hasta el punto $x = d$. Como se puede observar en la figura, existe una tercera esfera pequeña con carga que puede deslizarse con libertad sobre la varilla. ¿En qué posición deberá estar la tercera esfera para estar en equilibrio? Explique si puede estar en equilibrio estable.

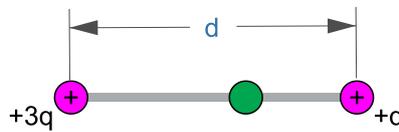


Figura 4.3: Carga en supuesto equilibrio.

4.2.2. Respuesta

$$x = 0,634d$$

4.2.3. Solución

Ambas fuerzas serán de repulsión si la tercera carga fuese positiva o de atracción si fuese negativa. El análisis para ambos casos es análogo, cambiando sólo los sentidos de las fuerzas, aunque no sus módulos. Entonces, suponiendo positiva a la tercera carga en cuestión:

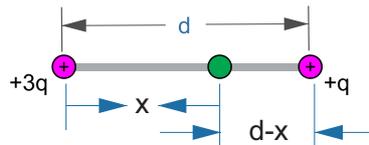


Figura 4.4: Carga en equilibrio.

$$\vec{F}_{TOTAL} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{x^2} \right) (\hat{i}) + \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{x^2} \right) (-\hat{i}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{q_1 q_3}{x^2} = \frac{q_2 q_3}{(x-d)^2} \text{ (simplifico } q_3)$$

$$\frac{q_1}{q_2} (d-x)^2 = x^2 \text{ (reemplazo los valores de } q_1 \text{ y } q_2)$$

$$\frac{3q}{q} (d-x)^2 = x^2$$

$$\sqrt{3}(d-x) = x$$

$$\sqrt{3}d - \sqrt{3}x = x$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}d \Rightarrow x = 0,634d$$

4.3. Problema

4.3.1. Enunciado

Determine el punto (distinto del infinito) en el cual el campo eléctrico es igual a cero.



Figura 4.5: Campo en la línea entre dos cargas opuestas.

4.3.2. Respuesta

El punto se encuentra $1,82m$ a la izquierda de la carga negativa.

4.3.3. Solución

Tomando las tres posibles zonas sobre eje de ambas cargas, a saber, de acuerdo a la figura:

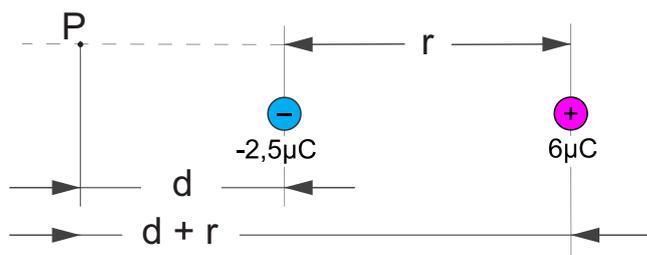


Figura 4.6: División de las tres zonas posibles sobre el eje.

- A la derecha de la carga positiva.
- Entre ambas cargas.
- A la izquierda de la carga negativa.

Descartamos la opción b, debido a que las líneas de campo debidas a cada una de las cargas se suman vectorialmente, con lo cual en esta zona no es posible hallar un punto de campo eléctrico nulo.

En cuanto a la opción a, si bien en esta zona el sentido de las líneas de campo sobre el eje debidas a la carga positiva es opuesto al sentido de las líneas de campo debidas a la carga negativa, el valor de la carga positiva es mayor que la negativa, en módulo, y su distancia a cualquier punto situado sobre el eje, dentro de esta zona, es menor que para la carga negativa. Con esto, el campo debido a la carga positiva será siempre mayor al generado por la carga negativa en toda la zona situada a la derecha de la carga positiva, sobre el eje.

Si más, la tercera opción es la única posible para encontrar un punto en el cual el campo total se anule.

Con esto aclarado, presuponemos que en el punto P situado a la izquierda de la carga positiva el campo debido a cada carga es de idéntico valor en módulo y sentido opuesto, con lo que obtenemos:

$$\|\vec{E}_1\| = \|\vec{E}_2\|$$

Siendo \vec{E}_1 el campo generado por la carga positiva y \vec{E}_2 el generado por la carga negativa.

$$\frac{k \cdot q_1}{(d+r)^2} = \frac{k \cdot q_2}{(d)^2}$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{(d+r)^2}{(d)^2}$$

$$\frac{6\mu\mathcal{C}}{2,5\mu\mathcal{C}} = \frac{(d+1)^2}{(d)^2}$$

$$\frac{6}{2,5} = \left(\frac{d+1}{d}\right)^2$$

$$1 + \frac{1}{d} = \sqrt{\frac{6}{2,5}}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{2,5}} - 1}$$

$$d = 1,820852385m$$

Esta distancia, como se acota en la figura, es hacia la izquierda de la carga negativa.

4.4. Problema

4.4.1. Enunciado

Para la distribución de cargas de la figura, en forma de cuadrado de lado “a”, halle el valor del campo eléctrico en el centro del cuadrado para los casos:

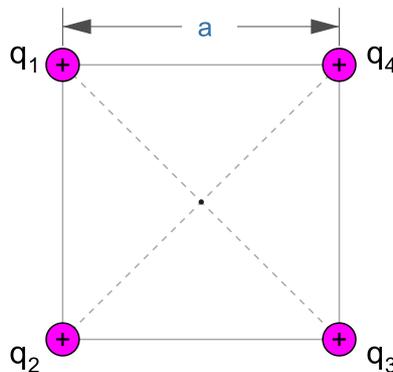


Figura 4.7: Configuración de cargas.

1. $a = 0,001m$; $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1pC$
2. $a = 0,001m$; $q_1 = 2q_2 = 3q_3 = 4q_4 = 1pC$

4.4.2. Respuesta

1. $E = 0$; Este caso es trivial; las contribuciones de cada carga se contrarrestan con su diametralmente opuesta.
2. $\vec{E}_{Total} = 23306\hat{i} - 10590\hat{j}$

4.4.3. Solución

Se realiza el diagrama vectorial correspondiente (el vector campo eléctrico debido a cada carga, en el punto P, centro de la distribución de cargas).

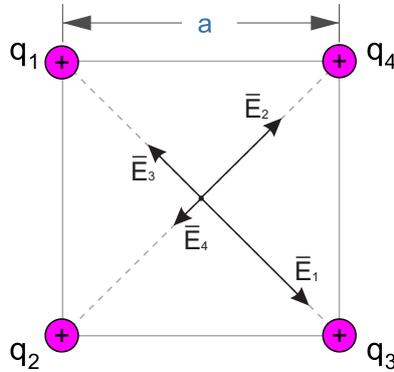


Figura 4.8: Diagrama vectorial.

Aplicando superposición, se calcula el campo eléctrico generado por cada carga, independientemente del resto, hallando así cada una de las contribuciones vectoriales en el punto en cuestión.

$$|\vec{E}_1| = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \right)$$

$$|\vec{E}_2| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \right) = \frac{1}{2} |\vec{E}_1|$$

$$|\vec{E}_3| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \right) = \frac{1}{3} |\vec{E}_1|$$

$$|\vec{E}_4| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_4}{r^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \right) = \frac{1}{4} |\vec{E}_1|$$

Nótese que si el lado del cuadrado conformado por las cargas tiene longitud “a”, entonces:

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}; \text{ con lo que reemplazando en las ecuaciones de campo obtenemos:}$$

$$|\vec{E}_1| = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \right) = \left(\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{a^2} \right) = \left(\frac{q_1}{\pi\epsilon_0 a^2} \right) = \frac{1 \times 10^{-12} C}{\pi 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} (0,001 m)^2} = 35957 \frac{N}{C}$$

$$|\vec{E}_2| = \frac{1}{2} |\vec{E}_1| = \frac{1}{2} \left(\frac{q_1}{\pi\epsilon_0 a^2} \right) = \frac{1}{2} 35957 \frac{N}{C} = 17983 \frac{N}{C}$$

$$|\vec{E}_3| = \frac{1}{3} |\vec{E}_1| = \frac{1}{3} \left(\frac{q_1}{\pi\epsilon_0 a^2} \right) = \frac{1}{3} 35957 \frac{N}{C} = 11989 \frac{N}{C}$$

$$|\vec{E}_4| = \frac{1}{4} |\vec{E}_1| = \frac{1}{4} \left(\frac{q_1}{\pi\epsilon_0 a^2} \right) = \frac{1}{4} 35957 \frac{N}{C} = 8992 \frac{N}{C}$$

Teniendo los módulos de los vectores, se procede a la suma vectorial de acuerdo a los siguientes gráficos.

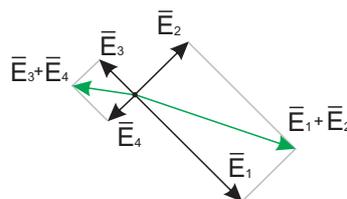


Figura 4.9: Suma vectorial (paso 1)

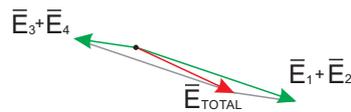


Figura 4.10: Suma vectorial (paso 2)

O bien en forma analítica:

$$\vec{E}_{Total} = [35957 \times \cos(-45^\circ) + 17983 \times \cos(45^\circ) + 11989 \times \cos(135^\circ) + 8992 \times \cos(225^\circ)] \hat{i} + [35957 \times \sin(-45^\circ) + 17983 \times \sin(45^\circ) + 11989 \times \sin(135^\circ) + 8992 \times \sin(225^\circ)] \hat{j}$$

$$\vec{E}_{Total} = 23306 \hat{i} - 10590 \hat{j}$$

4.5. Problema

4.5.1. Enunciado

Deduzca la expresión del campo generado por un dipolo eléctrico, como se ve en la figura, cuyas cargas se encuentran separadas por una distancia x , en un punto situado sobre la mediatriz de la línea imaginaria que los une y a una distancia d . Calcule el valor, dirección y sentido del campo eléctrico en ese punto para:

$$\begin{aligned} d &= 1\text{mm} \\ q_1 &= 1\mu\text{C} \\ q_2 &= -1\mu\text{C} \\ x &= 1\text{mm} \text{ y } x = 0,01\text{mm} \end{aligned}$$

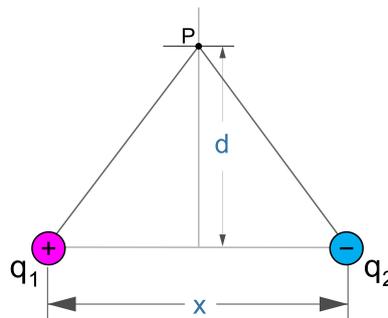


Figura 4.11: Dipolo eléctrico.

4.5.2. Respuesta

Definiendo $a = \frac{x}{2}$:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qa}{[a^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{[a^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{i}$$

con $p = qx = 2aq$, “Momento dipolar magnético”

Y para puntos lejanos al dipolo:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{d^3} \hat{i}$$

Para los datos brindados, el valor del campo en los puntos en cuestión resulta:

1. $x = 1mm \rightarrow \vec{E} = 6,434 \times 10^9 \frac{N}{C} \hat{i}$
2. $x = 0,01mm \rightarrow \vec{E} = 89,9 \times 10^6 \frac{N}{C} \hat{i}$

4.5.3. Solución

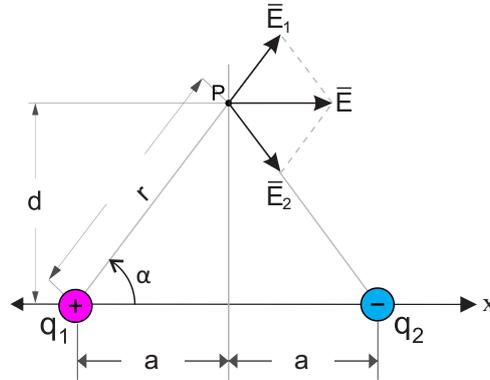


Figura 4.12: Diagrama vectorial de la contribución de cada carga al campo total.

Dado que las cargas tienen el mismo valor absoluto y se encuentran a la misma distancia r del punto en el cual se quiere hallar el campo eléctrico, se puede deducir que:

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_1| + |\vec{E}_2|$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(a^2 + d^2)}$$

$$|\vec{E}_{1x}| = |\vec{E}_{2x}| = |\vec{E}_x| \cos(\alpha)$$

Mientras que para el eje y , las contribuciones parciales de ambas cargas son opuestas y de idéntico módulo, por lo que:

$$|\vec{E}_y| = 0$$

Considerando entonces que el campo resultante tiene componente sólo en el eje x ,

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}}$$

$$\vec{E} = 2 |\vec{E}_x| \hat{i} = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(a^2 + d^2)} \cos(\alpha) \hat{i} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(a^2 + d^2)} \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}} \hat{i}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \cdot q \cdot a}{(a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i}$$

y reemplazando $a = \frac{x}{2}$:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \cdot q \cdot a}{\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + d^2\right]^{\frac{3}{2}}} \hat{i} \quad (1)$$

Definiendo al “Momento dipolar magnético” $p = qx = q2a$, la expresión toma la forma:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + d^2\right]^{\frac{3}{2}}} \hat{i}$$

Y para puntos lejanos al dipolo, es decir $d \gg a$, la expresión se reduce a:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{d^3} \hat{i}$$

Para obtener el valor del campo para los datos proporcionados, basta con reemplazar los valores en la expresión 1.

4.6. Problema

4.6.1. Enunciado

Hilo finito con carga.

Determine la expresión del campo que genera un hilo de longitud L con densidad de carga lineal $\lambda = \frac{Q}{L}$, en un punto P genérico situado sobre su mediatriz, a una distancia d del mismo. Calcule el valor del campo en dicho punto con los siguientes valores.

$$L = 1m$$

$$\lambda = \frac{10\mu C}{m}$$

$$d = 0,1cm ; d = 1cm ; d = 10cm$$

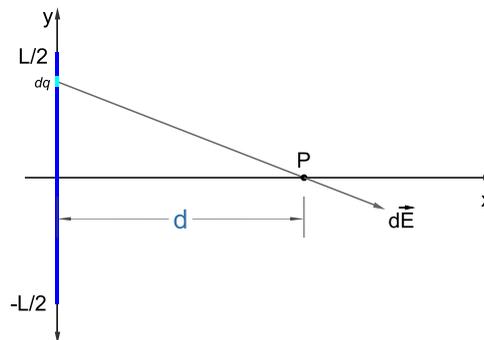


Figura 4.13: Campo generado por un hilo cargado de longitud finita sobre su mediatriz.

4.6.2. Respuesta

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\frac{L}{2}}{d\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + d^2}} \hat{i}$$

$$\text{Para } d = 0,1cm: \vec{E} = 180 \times 10^6 \frac{N}{C} \hat{i}$$

$$\text{Para } d = 1cm: \vec{E} = 180 \times 10^5 \frac{N}{C} \hat{i}$$

$$\text{Para } d = 10cm: \vec{E} = 176 \times 10^4 \frac{N}{C} \hat{i}$$

Nótese cómo en el último resultado la distancia d dentro de la raíz toma peso frente al valor de la longitud L del hilo. Cuando la distancia d resulte despreciable frente a la longitud L , se podrá entonces encontrar una expresión aproximada del campo eléctrico mucho más cómoda para operar, siempre que se cumpla esa condición. Esto se verá en el punto siguiente.

4.6.3. Solución

La solución se basará en el siguiente esquema de la distribución lineal de carga.

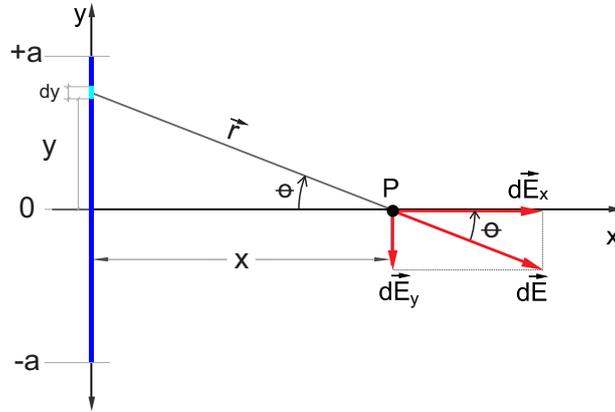


Figura 4.14: Sistema de ejes y notación utilizada.

$$\begin{aligned} |\vec{r}| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \frac{L}{2} &= a \\ \lambda &= \frac{Q}{L} = \frac{Q}{2a} \\ dQ &= \lambda dL = \lambda dy \end{aligned}$$

$$|d\vec{E}_x| = |d\vec{E}| \cos(\theta)$$

$$|d\vec{E}_y| = |d\vec{E}| \sin(\theta)$$

Nótese que por consideraciones de simetría, cada elemento diferencial de carga genera un campo $d\vec{E}_y$ y posee un elemento diferencial de carga opuesto, simétricamente hablando, que genera un $d\vec{E}_y$ opuesto. Por esto, se deduce que $\vec{E}_y = 0$, por lo que el campo total tiene componente únicamente en el eje x , ya que las contribuciones de los elementos de carga simétricos se suman en este eje.

$$\vec{E}_{Total} = \vec{E}_x$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \cos(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{x^2 + y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dl}{[x^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}$$

y como $dl \equiv dy$:

$$dE_x = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \frac{dy}{[x^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$E = E_x = \int_{-a}^{+a} \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \frac{dy}{[x^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^{+a} \frac{dy}{[x^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right]_{y \rightarrow -a}^{y \rightarrow +a}$$

$$E = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{a}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{(-a)}{x^2 \sqrt{x^2 + (-a)^2}} \right] = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{x\sqrt{x^2 + d^2}} \hat{i}$$

Reemplazando $a = \frac{L}{2}$ y $x = d$ se obtiene:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\frac{L}{2}}{d\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2})^2}} \hat{i}$$

4.7. Problema

4.7.1. Enunciado

Hilo infinito con carga. A partir del ejercicio anterior, determine la expresión del campo que genera un hilo de *longitud infinita* cargado con densidad lineal de carga λ . Halle el valor del campo con los mismos valores utilizados en el ejercicio anterior y por comparación de los resultados determine bajo qué condiciones la expresión del hilo infinito puede utilizarse en forma práctica.

4.7.2. Respuesta

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \hat{i}$$

4.7.3. Solución

A partir de la solución del punto anterior (campo generado por hilo cargado en un punto ubicado una distancia “d” sobre la mediatriz del mismo), se encontrará la solución al caso del hilo infinito, ya que sigue valiendo suponer al punto situado sobre la mediatriz del hilo, ya que el mismo tiene longitud infinita.

Entonces, para un hilo de longitud finita L , el campo en un punto P , sobre la mediatriz y a una distancia d del hilo resulta:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\frac{L}{2}}{d\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2})^2}} \hat{i}$$

Para un hilo de longitud infinita, aplicamos el límite apropiado a la expresión anterior.

$$\vec{E} = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\frac{L}{2}}{d\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2})^2}} \right) \hat{i}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2})^2}} \right) \hat{i} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d}{\frac{L}{2}}\right)^2 + (1)^2}} \right) \hat{i}$$

$\frac{d}{\frac{L}{2}} \rightarrow 0$ para $L \rightarrow \infty$, entonces:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \hat{i}$$

4.8. Problema

4.8.1. Enunciado

Anillo con carga.

Halle el campo eléctrico que genera un anillo de radio a coaxial al eje x , cargado con *densidad de carga lineal* λ , en un punto genérico P situado sobre el eje del mismo y a una distancia d . Encontrar expresiones para los casos extremos:

- Punto P ubicado en el centro del anillo $d = 0$
- Punto P muy lejano, sobre el eje, $d \gg a$

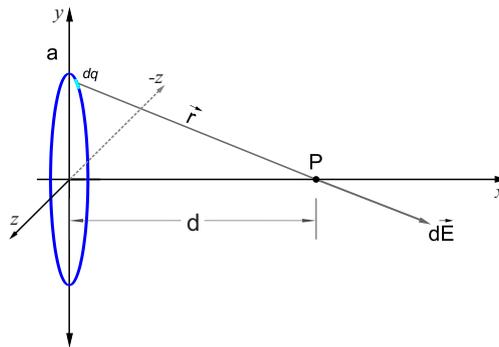


Figura 4.15: Anillo cargado.

4.8.2. Respuesta

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qd}{(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i}$$

O bien, reemplazando $\lambda = \frac{Q}{2\pi a}$:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{ad}{(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i}$$

Nota: Para distribuciones continuas de carga, como este caso y al igual que en el caso del hilo cargado, se prefiere la expresión del campo en función de la distribución lineal de carga λ , en lugar de la carga total Q .

- Punto P ubicado en el centro del anillo $d = 0$: $\vec{E}(d = 0) = 0$
- Punto P muy lejano, sobre el eje, $d \gg a$: $E(d \gg a) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{d}{a^2} \hat{i}$

4.8.3. Solución

Primeramente analizaremos algunos puntos a tener en cuenta:

- Radio del anillo cargado: a
- Carga total del anillo: Q
- Densidad lineal de carga del anillo: $\lambda = \frac{Q}{\text{perímetro}} = \frac{Q}{2\pi a}$
- $dQ = \lambda d(2\pi a) = \lambda ad\varphi$ con $0 \leq \varphi < 2\pi$

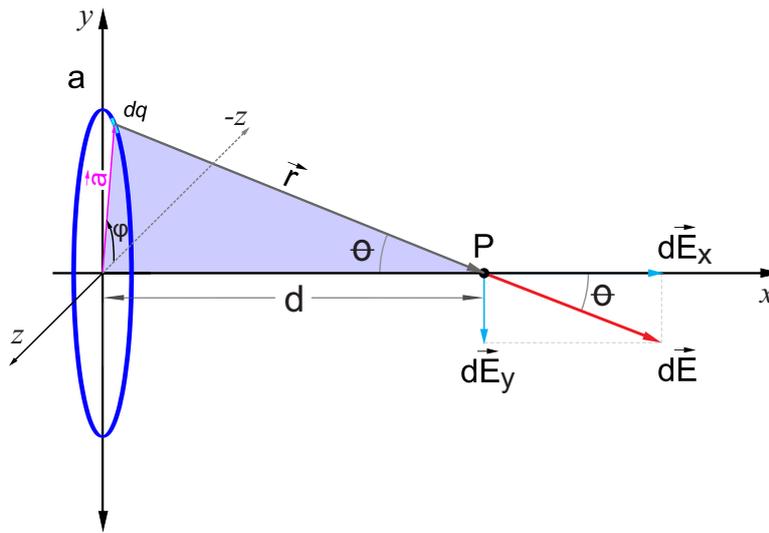


Figura 4.16: Anillo cargado: Campo diferencial dE generado por dQ y sus cotas correspondientes.

Nótese que el vector \vec{r} no varía su módulo al recorrer el anillo, ni tampoco el ángulo que forma con el eje x , siendo el mismo θ .

Por otra parte, el vector \vec{a} no varía su módulo al avanzar sobre la circunferencia del anillo, pero sí lo hace su ángulo de fase con respecto al eje z , siendo el mismo φ . Dicho ángulo φ será entonces nuestra variable de integración, ya que un diferencial de carga dQ se traduce en una variación angular en base a $dQ = \lambda a d\varphi$.

Dicho esto, cabe mencionar que las condiciones de simetría del problema, debidas a que el anillo es coaxial al eje x , provocan que el campo total resultante tenga componentes únicamente sobre este eje. Cualquier componente diferencial de carga que genere un diferencial de campo eléctrico con componente sobre eje y tendrá un elemento de carga opuesto, simétricamente hablando, que generará otro diferencial de campo eléctrico que anulará dicha componente, quedando solamente las componentes sobre el eje x , que se sumarán. Un lector atento observará que durante el análisis de cada elemento diferencial de carga, lo mismo ocurre con las componentes que inevitablemente se generan sobre el eje z , que al recorrer la circunferencia completa resultarán en una componente nula en este eje. Por lo tanto, el campo eléctrico total de esta distribución de cargas en forma de anillo, no es otra cosa que el campo total sobre el eje x .

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \cos(\theta)$$

- $r^2 = d^2 + a^2$
- $\cos(\theta) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2}}$
- $dQ = \lambda a d\varphi$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a d\varphi}{(d^2 + a^2)} \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2}}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a d}{(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi$$

$$E = E_x = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a d}{(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi$$

$$E = E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a d}{(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a d}{(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} (2\pi)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{a d}{(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} \quad (2)$$

Que no es otra cosa que:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q d}{(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} \quad (3)$$

La respuesta para este tipo de problemas, cuya distribución de cargas es continua, se prefiere expresada como en la ec. 2.

Para los casos extremos:

- Punto P ubicado en el centro del anillo $d = 0$

$$\vec{E}(d = 0) = 0$$

El campo generado por un anillo en el centro del mismo se anula por la simetría del problema.

- Punto P muy lejano, sobre el eje, $d \gg a$

$$\vec{E}(d \gg a) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{a}{d^2} \hat{i}$$

o bien, reemplazando $\lambda = \frac{Q}{2\pi a}$

$$\vec{E}(d \gg a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d^2} \hat{i}$$

Nótese que el campo generado por un anillo cargado, en un punto sobre su eje muy lejano $d \gg a$ es idéntica a la expresión del campo generado por una carga puntual para igual distancia. La condición $d \gg a$ implica que, al menos, $d \geq 10a$, es decir, que la distancia al anillo sea al menos 10 veces mayor que el radio del mismo.

4.9. Problema

4.9.1. Enunciado

Disco con carga.

A partir del ejercicio anterior, halle el campo que genera un disco sólido cargado, de radio a y con densidad superficial de carga σ , en un punto genérico P situado sobre su eje y a una distancia d .

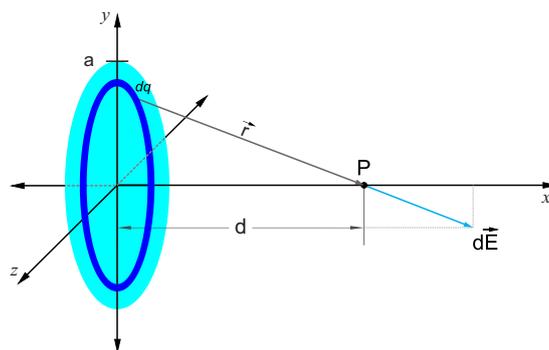


Figura 4.17: Campo creado por un disco cargado.

4.9.2. Respuesta

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} \right) \hat{i}$$

4.9.3. Solución

- Radio del disco cargado: a
- Carga total del disco: Q
- Densidad superficial de carga del disco: $\sigma \left[\frac{C}{m^2} \right] = \frac{Q}{\text{superficie}} = \frac{Q}{\pi a^2}$
- $dQ = \sigma \cdot dA = \sigma (2\pi R) (dR)$ con $0 \leq R < a$

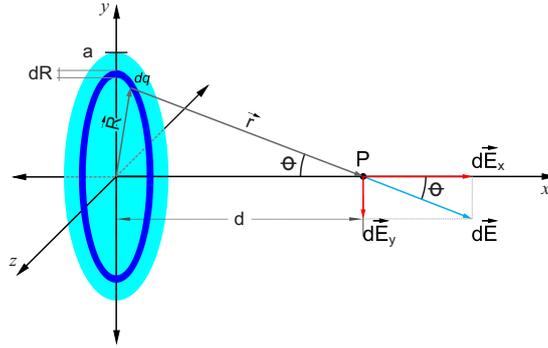


Figura 4.18: Disco cargado. Cotas y nomenclatura utilizada.

Al igual que en el caso del anillo cargado, la única componente de campo eléctrico que no se cancela por consideraciones de simetría es la componente x . Obviaremos entonces el cálculo del campo para las otras coordenadas. De esta manera:

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \cos(\theta)$$

- $dQ = \sigma (2\pi R) (dR)$
- $r^2 = d^2 + R^2$
- $\cos(\theta) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}}$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\sigma (2\pi R) (dR)]}{(d^2 + R^2)} \left(\frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}} \right)$$

$$dE_x = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \frac{R dR}{(d^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E = \int_{R=0}^{R=a} dE_x = \int_{R=0}^{R=a} \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \frac{R dR}{(d^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \int_{R=0}^{R=a} \frac{R dR}{(d^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}} \right]_{R=0}^{R=a}$$

$$E = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{a^2 + d^2}} - \frac{-1}{\sqrt{0 + d^2}} \right] = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{a^2 + d^2}} + \frac{1}{d} \right]$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{-d}{\sqrt{a^2 + d^2}} + \frac{d}{d} \right]$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} \right] \hat{i}$$

4.10. Problema

4.10.1. Enunciado

Plano infinito cargado.

A partir de ejercicio anterior, analice el caso límite en que el radio del disco tienda a infinito. Este es el caso de un *plano infinito cargado*. Deduzca la expresión del campo que genera dicha distribución de carga superficial y analice de qué manera varía dicho campo espacialmente.

4.10.2. Respuesta

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}$$

4.10.3. Solución

Siendo el campo generado por un disco de radio a el siguiente:

$$\vec{E}_{disco} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} \right] \hat{i}$$

Aplicamos el límite adecuado, para la situación en que $a \rightarrow \infty$

$$\vec{E}_{plano} = \lim_{a \rightarrow \infty} (\vec{E}_{disco}) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} \right] \hat{i}$$

Para $a \rightarrow \infty$, tenemos que $\sqrt{a^2 + d^2} \simeq \sqrt{a^2} = a$

Entonces, para $a \rightarrow \infty$, tenemos que $\frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} \rightarrow 0$, con lo que:

$$\vec{E}_{plano} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}$$

Es de verdadera importancia analizar que esta distribución de cargas, del tipo de un plano infinito, *genera un campo perpendicular al mismo cuya intensidad no depende de la distancia a dicho plano*.

4.11. Problema

4.11.1. Enunciado

Halle la expresión del campo eléctrico situado entre dos placas infinitas y paralelas cargadas con densidad superficial de carga $\sigma_1 = -1\mu C/m^2$ y $\sigma_2 = 1\mu C/m^2$, como se aprecia en la figura.

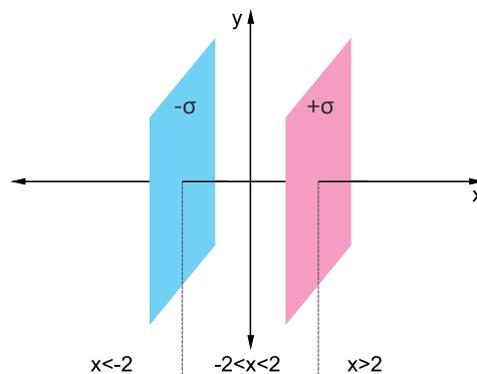


Figura 4.19: Planos infinitos enfrentados y cargados con carga opuesta.

Presuponga que los planos son normales al eje x y lo cortan en $x = -2m$ y $x = +2m$. Para el caso de encontrarse la placa infinita con carga negativa en $x = -2m$ y la positiva en $x = +2m$, deduzca el valor, dirección y sentido del campo eléctrico en las tres zonas posibles:

1. $x < -2m$
2. $-2m < x < 2m$
3. $x > 2m$

4.11.2. Respuesta

El campo eléctrico entre las placas resulta:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{i}$$

1. $E = 0$
2. $E = 112 \times 10^3 \frac{N}{C} \hat{i}$
3. $E = 0$

4.11.3. Solución

Partiendo del campo eléctrico obtenido para el plano infinito, descrito por la ecuación, analizamos qué sucede al tener dos planos infinitos enfrentados y con carga opuesta. El análisis de las líneas de campo generadas por cada plano va a dar lugar a la respuesta y por ello lo analizaremos gráficamente.

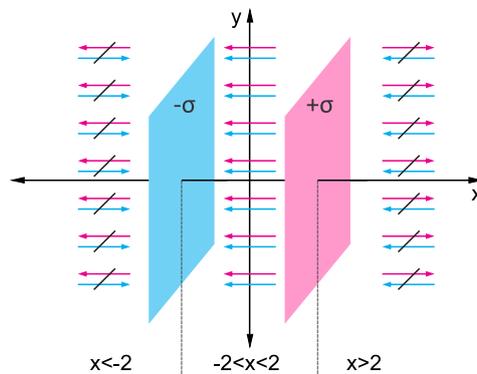


Figura 4.20: Líneas de campo generadas por ambos planos cargados.

Conociendo a priori que el campo eléctrico generado por un plano infinito cargado no varía en intensidad con la distancia, que su dirección es siempre perpendicular al plano y que su sentido es saliente del plano para un plano cargado positivamente y entrante para un plano cargado negativamente, podemos determinar que para el caso que nos ocupa, que consta de dos planos infinitos idénticos, separadas por una distancia d y con cargas de igual módulo y signo opuesto, el campo eléctrico total se anula en las zonas externas y se duplica en la zona del espacio existente entre los planos. Así, el campo eléctrico en la zona comprendida entre los planos resulta:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (-\hat{i}) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (-\hat{i}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (-\hat{i})$$

El signo (-) se debe sencillamente a la geometría elegida a modo de ejemplo, que determina que las líneas de campo en esta zona tengan dirección en el eje x y sentido hacia $-x$ (hacia la izquierda), de acuerdo al gráfico.

4.12. Problema

4.12.1. Enunciado

Una esfera conductora de masa $m = 0,002g$ tiene una carga $q = 5 \times 10^{-8}C$ y cuelga de una cuerda de material aislante y de masa despreciable cerca de una lámina muy grande, conductora y con carga positiva. La densidad de carga superficial de la lámina es $\sigma = 2,5 \times 10^{-9} \frac{C}{m^2}$. Encuentre el ángulo que forma el cordel con respecto a la vertical.

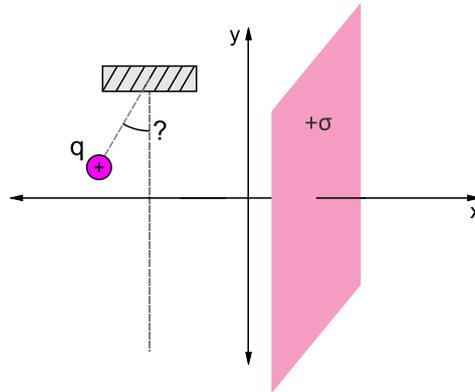


Figura 4.21: Esfera cargada colgando cerca de un plano cargado.

4.12.2. Respuesta

$$\theta = 19,8^\circ$$

4.12.3. Solución

Para encontrar el ángulo que forma la carga con respecto al eje y , realizaremos el diagrama del cuerpo libre de la misma.

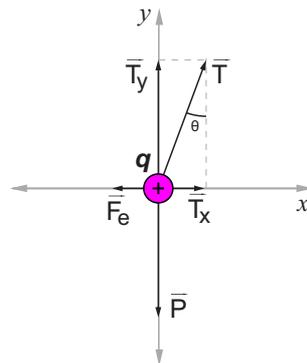


Figura 4.22: Diagrama de cuerpo libre de la carga.

Dada la condición de equilibrio, por centrar nuestros estudios en electrostática, conocemos de antemano que las resultantes de fuerza sobre ambos ejes tiene que ser nula para tal condición. Entonces, procedemos a analizar las fuerzas sobre cada eje.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow T_y = P \rightarrow T \cos \theta = mg$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow T_x = F_e \rightarrow T \sin \theta = qE \rightarrow T \sin \theta = q \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Dividiendo miembro a miembro: °

$$\frac{T \operatorname{sen} \theta}{T \operatorname{cos} \theta} = \frac{q \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0}}{mg}$$

$$\tan \theta = \frac{q \sigma}{2mg \varepsilon_0}$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{q \sigma}{2mg \varepsilon_0} \right)$$

Reemplazando valores obtenemos:

$$\theta = \arctan \left(\frac{(5 \times 10^{-8} C) (2,5 \times 10^{-9} \frac{C}{m^2})}{2 (0,002 \times 10^{-3} kg) (9,81 \frac{m}{s^2}) (8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2})} \right)$$

$$\theta = 19,8^\circ$$

4.13. Problema

4.13.1. Enunciado

Dos esferas idénticas de masa m cuelgan de cordones idénticos de longitud L , como se aprecia en la figura. Cada esfera posee la misma carga, por lo que $q = q_1 = q_2$. El radio de cada esfera es muy pequeño en comparación con la distancia entre las mismas, por lo que resulta despreciable y pueden considerarse cargas puntuales. Demuestre que si el ángulo α es pequeño, la separación de equilibrio d entre las esferas resulta $d = \sqrt[3]{\frac{q^2 L}{2\pi \varepsilon_0 m g}}$. Tenga en cuenta que si α es pequeño, entonces $\tan(\alpha) \simeq \operatorname{sen}(\alpha)$.

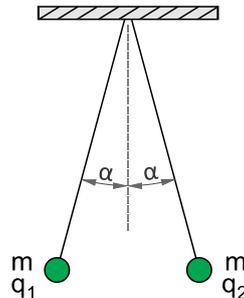


Figura 4.23: Cargas idénticas colgantes, en estado de equilibrio.

4.13.2. Respuesta

$$d = \sqrt[3]{\frac{q^2 L}{2\pi \varepsilon_0 m g}}$$

4.13.3. Solución

Se plantea el diagrama del cuerpo libre para una de las cargas; el diagrama correspondiente a la otra carga será simétrico con respecto al eje y .

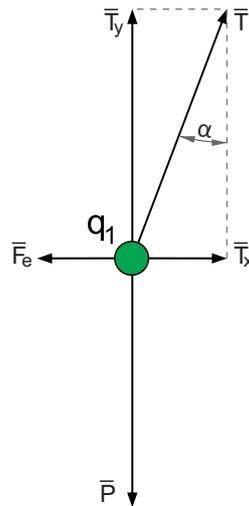


Figura 4.24: Diagrama de cuerpo libre de una de las cargas.

Dado que el sistema se encuentra en equilibrio, las fuerzas resultantes sobre ambos ejes resultan nulas.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow T_y = P \rightarrow T \cos(\alpha) = mg$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow T_x = F_e \rightarrow T \sin(\alpha) = qE \rightarrow T \sin(\alpha) = q \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{d^2} \right) \rightarrow T \sin(\alpha) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2}$$

Dividiendo miembro a miembro se obtiene:

$$\frac{T \sin(\alpha)}{T \cos(\alpha)} = \frac{\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2} \right)}{mg}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{mg d^2}$$

Para α pequeño, se puede realizar la aproximación $\tan(\alpha) \simeq \sin(\alpha)$

Con $\sin(\alpha) = \frac{d}{2L} = \frac{d}{2L}$ y reemplazando se llega al resultado.

$$\frac{d}{2L} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{mg d^2}$$

$$d^3 = \frac{q^2 2L}{4\pi\epsilon_0 mg} = \frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg}}$$

4.14. Problema

4.14.1. Enunciado

Se lanza un electrón con velocidad inicial $v_0 = 1,6 \times 10^6 \frac{m}{s}$ hacia el interior de un campo uniforme entre las placas paralelas, como se aprecia en la figura. Suponga que el campo entre las placas es uniforme y está dirigido verticalmente hacia abajo, y que el campo fuera de las placas es igual a cero. El electrón ingresa al campo en un punto equidistante de las dos placas.

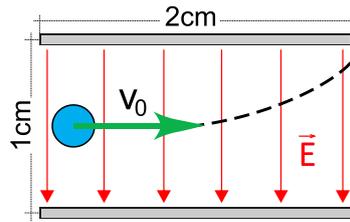


Figura 4.25: Partícula cargada ingresando a la zona entre placas cargadas.

1. Si el electrón apenas libra la placa superior al salir del campo, encuentre la magnitud del campo eléctrico.
2. Suponga que en la figura el electrón es sustituido por un protón con la misma velocidad inicial v_0 . ¿Golpearía el protón alguna de las placas? Si el protón no golpea ninguna de las placas, ¿cuáles serían la magnitud y la dirección de su desplazamiento vertical, a medida que sale de la región entre las placas?
3. Compare las trayectorias que recorren el electrón y el protón, y explique las diferencias.
4. Analice si es razonable ignorar los efectos de la gravedad para cada partícula.

4.14.2. Respuesta

1. $\vec{E} = 364 \frac{N}{C} (-\hat{i})$
2. El desplazamiento vertical será: $\Delta y = 2,73 \times 10^{-6} m$ (hacia abajo).
3. Las trayectorias tienen direcciones opuestas debido a las cargas opuestas. La fuerza que ejerce el campo eléctrico sobre ambas cargas es idéntica en módulo, pero debido a que el protón posee una masa 1836 veces mayor a la del electrón, su aceleración y su desplazamiento vertical será menor en la misma proporción.
4. La aceleración producida por el campo eléctrico es mucho mayor que la producida por la fuerza de gravedad, por lo que se justifica despreciar a la misma en los cálculos.

4.14.3. Solución

■ Punto 1

Que el electrón apenas libre las placas se traduce matemáticamente en que, de acuerdo a las dimensiones y separación de las mismas:

$$\Delta x = x - x_0 = 2cm = 0,02m \rightarrow \Delta y = y - y_0 = 0,5cm = 0,005m$$

De estas variaciones de posición se desprender dos ecuaciones, una para cada eje. Sobre el eje x la partícula no se verá afectada por el campo eléctrico, por lo que no habrá entonces aceleración a_x , mientras que para el eje y sí la habrá, siendo la misma $a_y = \frac{F_e}{m}$, con $F_e = qE$.

Eje x

$$\Delta x = x - x_0 = v_0 t$$

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} = \frac{0,02m}{1,6 \times 10^6 \frac{m}{s}} \rightarrow t = 1,25 \times 10^{-8} s$$

Ese será el tiempo total que demora el electrón en atravesar la zona entre placas.

Eje y

$$\Delta y = y - y_0 = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

Y como la velocidad inicial no tiene componente en el eje y :

$$a_y = \frac{\Delta y}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$a_y = 2 \frac{0,005m}{(1,25 \times 10^{-8}s)^2}$$

$$a_y = 6,4 \times 10^{-13} \frac{m}{s^2}$$

Y ya habiendo analizado que $a_y = \frac{F_e}{m}$:

$$F_e = qE = a_y m$$

$$E = \frac{a_y m_e}{q_e} \quad (4)$$

$$E = \frac{(6,4 \times 10^{-13} \frac{m}{s^2}) (9,109 \times 10^{-31} kg)}{(1,602 \times 10^{-19} C)}$$

$$\vec{E} = 364 \frac{N}{C} (-\hat{j})$$

La dirección del campo es claramente vertical y el signo negativo indica que las líneas de campo tienen sentido hacia abajo, de acuerdo al gráfico.

■ Punto 2

En caso de sustituir al electrón por un protón, el análisis se mantiene, teniendo presente que la masa del protón es 1836 veces mayor que la del electrón y, por supuesto, que su carga es de igual módulo y signo contrario. De esta manera procedemos a analizar la parábola que describiría el protón al ingresar a la zona entre las placas cargadas. Retomamos la expresión 4, reemplazando los valores por los del protón.

$$E = \frac{a_y m_p}{q_p} = \frac{a_y 1836 m_e}{q_e}$$

$$a_y = \frac{E q_e}{1836 m_e} = \frac{(364 \frac{N}{C}) (1,602 \times 10^{-19} C)}{1836 (9,109 \times 10^{-31} kg)}$$

$$a_y = 3,4867 \times 10^{10} \frac{m}{s^2}$$

Este valor de aceleración es 1836 veces menor que para el caso del electrón, por lo que se deduce que la desviación del protón con respecto a la línea horizontal de partida (Δy) será mucho menor y por ende no chocará a ninguna placa. El valor de este desplazamiento será entonces:

$$\Delta y = y - y_0 = \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$\Delta y = \frac{1}{2} \left(3,4867 \times 10^{10} \frac{m}{s^2} \right) (1,25 \times 10^{-8} s)^2$$

Nótese que el tiempo que le toma al protón atravesar la zona entre las placas es el mismo que el que le toma al electrón, ya que ninguna fuerza se opone al movimiento sobre el eje horizontal x .

$$\Delta y = 2,724 \times 10^{-6} m$$

El desplazamiento del protón, será hacia abajo, en el sentido que impone el campo eléctrico, es decir, siendo repelido por la placa cargada positivamente.

■ Punto 3

Las trayectorias tienen direcciones opuestas debido a las cargas opuestas. La fuerza que ejerce el campo eléctrico sobre ambas cargas es idéntica en módulo, pero debido a que el protón posee una masa 1836 veces mayor a la del electrón, su aceleración y su desplazamiento vertical será menor en la misma proporción.

■ Punto 4

Tanto para el electrón: $a_{y(\text{electrón})} = 6,4 \times 10^{-13} \frac{m}{s^2} \gg 9,81 \frac{m}{s^2}$ como para el protón: $a_{y(\text{protón})} = 3,4867 \times 10^{10} \frac{m}{s^2} \gg 9,81 \frac{m}{s^2}$. Es decir, ambas aceleraciones son mucho mayores que la de la gravedad, por lo que resulta acertado despreciar la aceleración de la gravedad y sus efectos en los cálculos realizados.

4.15. Problema

4.15.1. Enunciado

Haciendo uso de la *ley de Gauss*, determine el campo eléctrico generado por una esfera conductora de radio R , con carga neta q , en un punto a una distancia d de la misma. Deduzca la expresión genérica del campo eléctrico y determine cualitativamente y cuantitativamente la variación del mismo para distintos valores de d , contemplando los siguientes: $d = 0$; $d = R$; $d = 2R$; $d = 3R$. Grafique los resultados obtenidos.

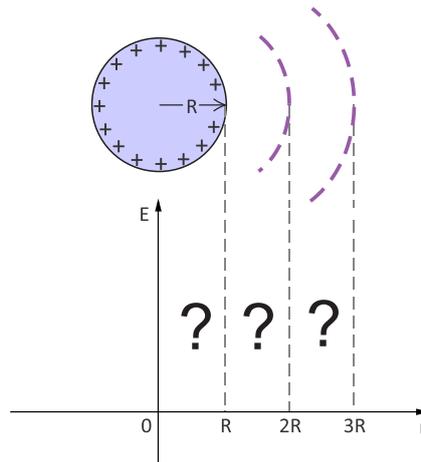


Figura 4.26: Esfera conductora cargada positivamente.

4.15.2. Respuesta

El campo eléctrico generado por la esfera conductora cargada con carga neta Q resulta:

Para $r < R \rightarrow E = 0$

Para $r \geq R \rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ (idéntico al campo que generaría una carga puntual situada en el centro de la esfera que concentre el mismo valor de carga).

4.15.3. Solución

La aplicación de la ley de Gauss implica la búsqueda de una superficie (llamada superficie gaussiana) que resulte simétrica con respecto a la distribución de carga dada. Para este caso, la distribución de carga es una esfera y, por ello, la única superficie que resulta simétrica a la misma es otra esfera que comparta el centro; habrá que analizar dos casos bien separados: el campo eléctrico para radios menores al de la esfera y el campo eléctrico para radios mayores al de la misma.

Partimos de la ley de Gauss.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Para $r < R \rightarrow Q_{enc} = 0$ y dado que una integral de superficie para un valor de $0 < r < R$ será siempre distinta de cero, el campo eléctrico entonces será nulo: $E = 0$. *Al no haber carga neta encerrada, la ley de Gauss nos permite deducir que en dicha región el campo eléctrico es nulo.*

Para $r > R \rightarrow Q_{enc} = Q$ (la superficie gaussiana encierra toda la carga).

Ambas situaciones se representan en la siguiente figura.

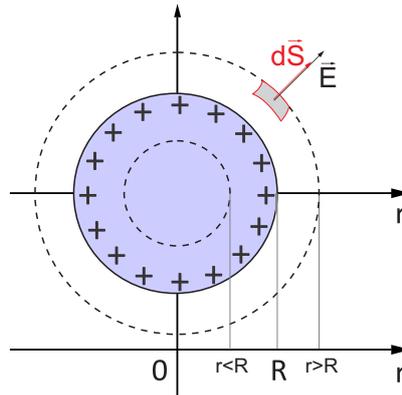


Figura 4.27: Superficies gaussianas esféricas concéntricas a la esfera cargada.

Es de fundamental importancia notar que, como puede apreciarse en la figura, para la superficie gaussiana cuyo radio $r > R \rightarrow \vec{E} \parallel d\vec{S}$, para cualquier elemento diferencial de superficie de dicha superficie gaussiana. De esta manera, sobre la superficie gaussiana se cumplirá que $\vec{E} \cdot d\vec{S} = |\vec{E}||d\vec{S}|\cos(0) = |\vec{E}||d\vec{S}|$, por lo que la integración de vectores pasa a ser una integración de escalares. Por otra parte, dado que en todos los puntos pertenecientes a la superficie gaussiana la distancia r a la carga es la misma, la intensidad (y por ende el valor absoluto) del campo eléctrico será la misma; el módulo del vector campo eléctrico $|\vec{E}|$ es una constante y puede entonces reescribirse la ley de Gauss de la siguiente manera:

$$E \oint_s dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

La integración resulta: $\oint_s dS = S = 4\pi r^2$

$$E (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Y expresado vectorialmente, en función del versor radial \hat{r} :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Obteniendo entonces el campo eléctrico generado por la esfera conductora cargada para distancias mayores a su radio ($r > R$).

Resulta muy importante concluir que el campo eléctrico resulta idéntico al que generaría una carga puntual situada en el centro de la esfera conductora cargada, cuya carga sea la misma que la de la esfera.

Debido a la dependencia con la inversa del cuadrado de la distancia r , la intensidad del campo eléctrico responde a la siguiente forma.

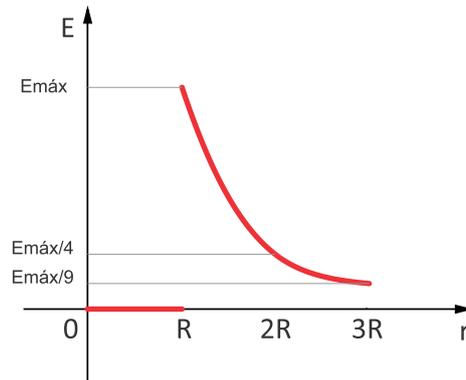


Figura 4.28: Intensidad del campo eléctrico debida a una esfera conductora cargada en función de la distancia al centro de la misma.

4.16. Problema

4.16.1. Enunciado

Mediante la ley de Gauss, determine el campo generado por una línea infinita con densidad de carga lineal λ [$\frac{C}{m}$] en un punto genérico P situado a una distancia d de la línea. Compare la expresión con la hallada mediante la ley de Coulomb.

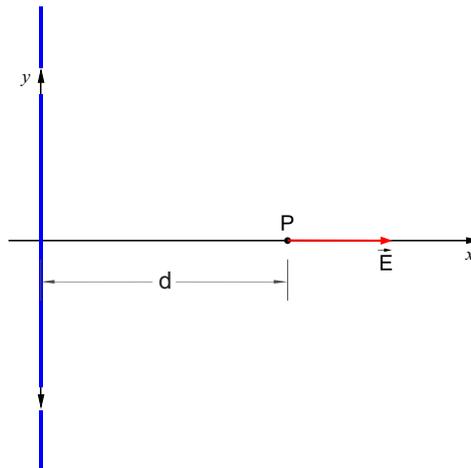


Figura 4.29: Campo generado por una línea infinita cargada.

4.16.2. Respuesta

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \hat{i}$$

4.16.3. Solución

Se parte de la ley de Gauss.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Debe hacerse uso de una superficie gaussiana que satisfaga dos condiciones:

1. Debe ser una superficie cerrada que contenga al punto P sobre el cual quiere hallarse el campo eléctrico.

2. Tenga total simetría con la distribución de carga. Esto puede analizarse observando si los vectores $d\vec{S}$ de la superficie gaussiana son paralelos al vector \vec{E} en toda la superficie.

La superficie debe ser cerrada y simétrica con respecto a la distribución de carga; la superficie cerrada que guarda más simetría con respecto a un hilo infinito es un cilindro. Para que dicho cilindro contenga al punto P , que está ubicado a una distancia d del hilo cargado, tomaremos a la superficie gaussiana cilíndrica de radio d . El vector campo eléctrico resulta paralelo a todos los elementos $d\vec{S}$ de la superficie gaussiana, excepto en las tapas del cilindro, en las que ambos vectores resultan siempre normales entre sí, como se aprecia en la siguiente figura.

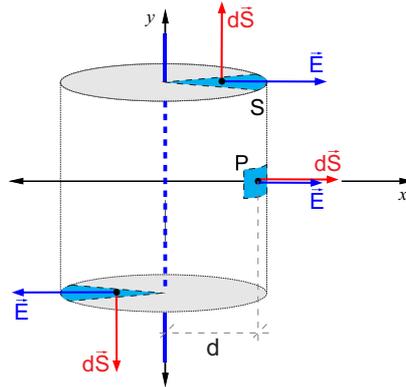


Figura 4.30: Análisis de los vectores $d\vec{S}$ y \vec{E} sobre la superficie gaussiana elegida.

Se verá que la altura que se elija para el cilindro tomado como superficie gaussiana no afecta al desarrollo, por lo que tomaremos un valor genérico L para el mismo.

Conociendo que esta superficie cerrada se puede descomponer en tres superficies abiertas: cilindro S_1 , tapa superior S_2 y tapa inferior S_3 , procederemos a analizar la ley de Gauss descomponiendo la integral de superficie cerrada en tres integrales de superficie abiertas.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Para S_2 y S_3 (tapas del cilindro), se encuentra que $\vec{E} \cdot d\vec{S} = |\vec{E}| |d\vec{S}| \cos(90) = 0$, debido a la normalidad entre ambos vectores. De esta forma sólo resta analizar la superficie abierta formada por el cilindro sin tapas.

$$\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Aquí debemos analizar la carga neta encerrada Q_{enc} . Tal carga encerrada no es la carga total Q , sino una porción de la misma, determinada por la siguiente relación:

$$Q_{enc} = \lambda L$$

Es decir, la carga neta encerrada es la densidad lineal de carga multiplicada por la longitud de la superficie gaussiana; es sólo una parte de la carga total Q . Reemplazando:

$$\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

Y sabiendo que el producto escalar entre los vectores se transforma en un producto entre escalares:

$$E \int_{S_1} dS = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$E (2\pi dL) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{d} \hat{i}$$

Este resultado es idéntico al obtenido aplicando la ley de Coulomb.

Una forma más general, ya que el punto podría no estar situado sobre el eje x puede ser:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\rho} \hat{\rho}$$

Siendo ρ la coordenada radial del sistema de coordenadas cilíndricas y $\hat{\rho}$ su versor asociado. Se aconseja repasar los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas para las aplicaciones del electromagnetismo.

4.17. Problema

4.17.1. Enunciado

Mediante la ley de Gauss determine el campo eléctrico que genera una lámina delgada, plana e infinita, cargada con carga superficial uniforme σ .

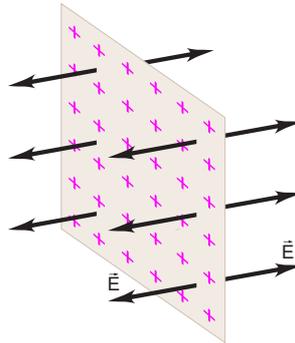


Figura 4.31: Lámina infinita cargada.

4.17.2. Respuesta

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (\pm \hat{i})$$

El sentido del campo es opuesto en ambos lados de la lámina cargada.

4.17.3. Solución

Se parte de la ley de Gauss.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Como superficie gaussiana tomamos un cilindro, como se ve en la figura. Podría haberse tomado un cubo atravesado por la lámina, llegando a idéntico resultado; el uso del cubo implica analizar más superficies abiertas que el cilindro.

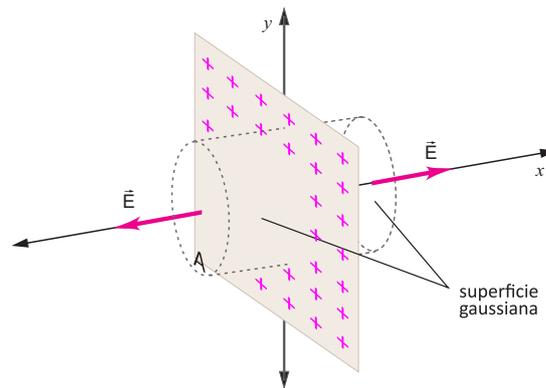


Figura 4.32: Superficie gaussiana elegida.

Para analizar la simetría del cilindro elegido con la distribución de cargas laminar, debemos analizar al cilindro (superficie cerrada) como tres superficies abiertas: cilindro abierto, base y tapa.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{base} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{tapa} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{cilindro} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Las dos primeras integrales de área, propias de la base y de la tapa del cilindro, resultan distintas de cero, dado que el vector $d\vec{S}$ resulta paralelo al campo eléctrico \vec{E} en ambas. El producto punto analizado sobre la superficie cilíndrica resulta nulo y por ende la tercera integral se anula. Además, las dos primeras integrales arrojarán el mismo resultado, por lo que se simplifica el análisis a la siguiente expresión.

$$2 \int_{tapa} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

La carga encerrada dentro del cilindro, cuyas tapas poseen un área de valor genérico A , resulta:

$$Q_{enc} = \sigma A$$

Reemplazando:

$$2 \int_{tapa} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$\vec{E} \parallel d\vec{S}$ y poseen además el mismo sentido; además, E tiene un valor constante sobre estas superficies, por lo que puede salir de la integral.

$$E \int_{tapa} dS = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot (A) = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Y en forma vectorial, de acuerdo al sistema de ejes del gráfico inicial:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i} \quad x > 0$$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i} \quad x < 0$$

4.18. Problema

4.18.1. Enunciado

Dadas dos placas paralelas, grandes y planas, cargadas con igual magnitud y signo contrario con densidades de carga $+\sigma$ y $-\sigma$, determine el campo eléctrico en la región entre las placas mediante la ley de Gauss. Para el análisis, utilice el modelo idealizado de la figura. Analice de qué manera varía el campo eléctrico en la situación real.

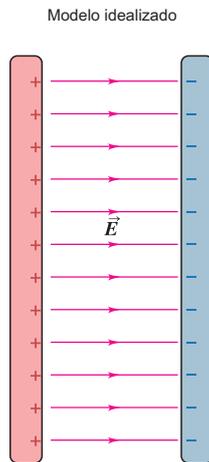


Figura 4.33: Planos infinitos, cargados y enfrentados. Modelo idealizado.

4.18.2. Respuesta

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{i}$$

Para el caso real, en el cual las láminas no tienen dimensiones infinitas, se aprecian el efecto de borde, que distorsiona las líneas de campo eléctrico en los límites de las láminas. Por otro lado, el campo eléctrico fuera de la zona entre las láminas resultará distinto de cero para el caso real, ya que la distribución de cargas en las mismas no será perfectamente uniforme y, por ende, habrá líneas de campo resultantes en tales zonas externas, como se aprecia en la figura siguiente.

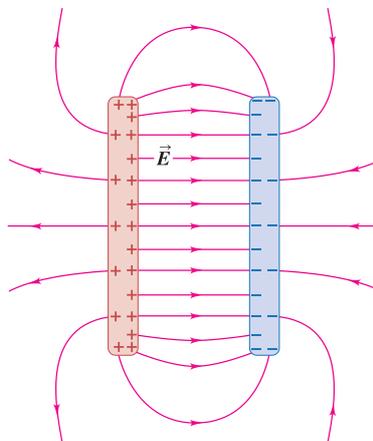


Figura 4.34: Campo eléctrico para dos láminas cargadas. Caso real.

4.18.3. Solución

Para aplicar la ley de Gauss, elegimos como superficie gaussiana un cubo cuyas caras poseen área A . Para poder cubrir todas las zonas espaciales de este problema, tomamos cuatro superficies gaussianas idénticas, como se aprecia en la figura.

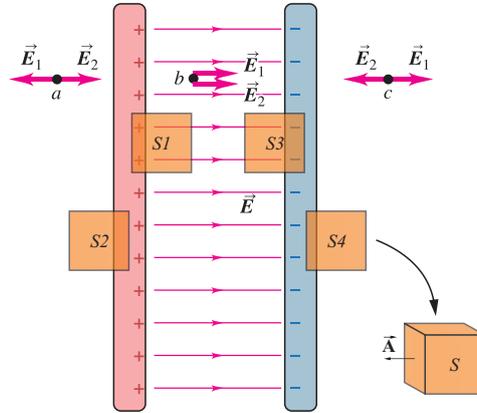


Figura 4.35: Líneas de campo y superficies gaussianas elegidas.

Analizando la dirección de las líneas de campo eléctrico se puede concluir que la única zona en la cual el mismo no se anula es la zona espacial entre las láminas cargadas, donde las líneas de campo eléctrico se suman entre sí, duplicando la intensidad del mismo.

Por otra parte, las superficies S_2 y S_4 no encierran cargas, por lo que la aplicación de la ley de Gauss sobre estas superficies arroja la misma conclusión, es decir, que el campo eléctrico fuera de las láminas es nulo. Analíticamente:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{s_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = 0 \rightarrow \vec{E} = 0$$

$$\oint_{s_4} \vec{E} \cdot d\vec{S}_4 = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = 0 \rightarrow \vec{E} = 0$$

La superficie S_1 , por su parte, encierra carga eléctrica. Siendo el área de cada cara del cubo usado como superficie gaussiana A y la densidad de carga superficial de la lámina de la izquierda σ , tenemos:

$$\oint_{s_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

Y por otra parte, el producto $\vec{E} \cdot d\vec{S}_1$ será distinto de cero únicamente para las caras cuyo vector de área \vec{A} no resulte normal al vector campo eléctrico \vec{E} . De esta manera, la integral de superficie cerrada se transforma en una sumatoria de integrales de superficie abiertas y, analizando las seis caras del cubo obtenemos:

$$\oint_{s_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = EA \cos(0) + EA \cos(0) + EA \cos(90) + EA \cos(90) + EA \cos(90) + EA \cos(90) = 2EA$$

De esta manera, teniendo sólo dos caras que aportan flujo en la integral de Gauss, podemos reescribir:

$$\oint_{s_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = 2EA = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\sigma A}{\varepsilon_0} = 2EA$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Vectorialmente y de acuerdo al gráfico:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i}$$

El análisis de la superficie gaussiana S_4 arroja un resultado idéntico para la zona entre las láminas cargadas.

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i}$$

Mediante la aplicación del principio de superposición, se obtiene el campo eléctrico total para la zona espacial entre las láminas.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2 \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{i} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{i}$$

Nótese como, para determinadas geometrías, puede aplicarse el principio de superposición a la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico. La separación de la distribución de cargas en distribuciones para las cuales ya se conoce de antemano el campo eléctrico y la posterior aplicación del principio de superposición, resultan herramientas sumamente útiles y elegantes para la resolución del problema.

4.19. Problema

4.19.1. Enunciado

Una carga eléctrica positiva Q está distribuida de manera uniforme en todo el volumen de una esfera aislante con radio R . Haciendo uso de la ley de Gauss, determine el campo eléctrico que genera dicha esfera aislante con carga en un punto a una distancia d de la misma. Deduzca la expresión genérica del campo eléctrico y determine cualitativamente y cuantitativamente la variación del mismo para distintos valores de d , contemplando los siguientes: $d = 0$; $d = \frac{R}{2}$; $d = R$; $d = 2R$; $d = 3R$. Grafique los resultados obtenidos y compare los resultados con el ejercicio 4.15, en el cual el material de la esfera era un conductor.

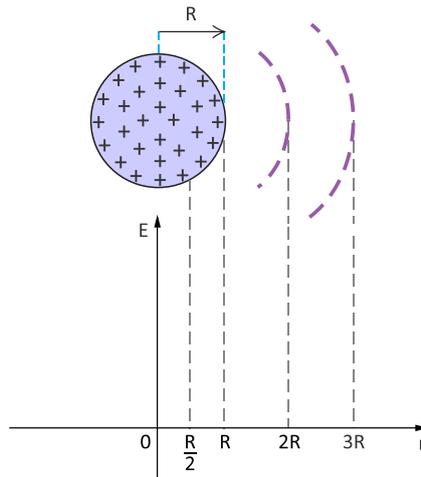


Figura 4.36: Esfera dieléctrica cargada.

4.19.2. Respuesta

$$r \geq R \rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

$$r < R \rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \hat{r}$$

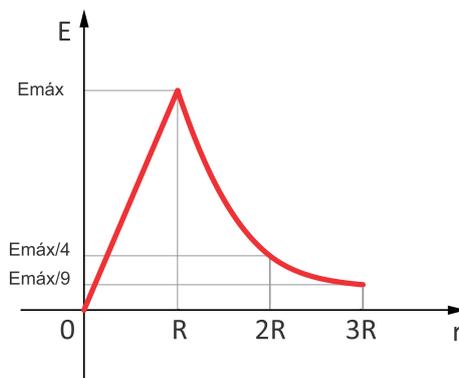


Figura 4.37: Intensidad del campo eléctrico en función de la distancia al centro de la esfera dieléctrica cargada.

4.19.3. Solución

Para aplicar la ley de Gauss, tomaremos dos zonas bien separadas: la zona interior de la esfera aislante cargada ($r < R$) y la zona exterior a la misma ($r > R$). Para cada zona se elegirá entonces una superficie gaussiana simétrica a la distribución de cargas, es decir, se tomarán dos esferas gaussianas de acuerdo a la siguiente figura.

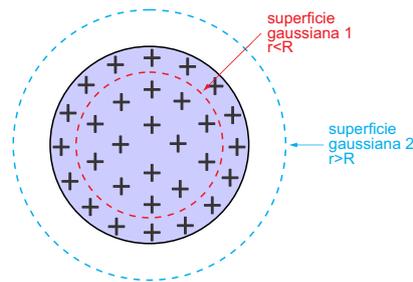


Figura 4.38: Superficies gaussianas elegidas.

- Zona 1: ($r < R$)

Se aplica la ley de Gauss.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

La clave en este punto del problema resulta analizar cuál es la carga neta encerrada por la superficie gaussiana. Como se observa en la figura, Q_{enc} es una porción de la carga total Q . Debido a la distribución volumétrica uniforme de la carga en la esfera aislante de radio R , la carga encerrada por la superficie gaussiana de radio r es, justamente, una relación entre los volúmenes de las superficies, y una relación entre volúmenes de esferas resulta en una relación entre sus radios.

$$Q_{enc} = Q \frac{V_{sup.gaussiana}}{V_{esfera}}$$

$$Q_{enc} = Q \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \rightarrow Q_{enc} = Q \frac{r^3}{R^3}$$

De esta manera y considerando que en todos los puntos de la superficie gaussiana se cumple que los vectores \vec{E} y $d\vec{S}$ son paralelos:

$$\vec{E} \parallel d\vec{S} \rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos(0) = E dS$$

El producto vectorial se transforma en un producto entre escalares y a su vez el campo eléctrico tiene intensidad en todos los puntos de la superficie gaussiana, por lo que E sale afuera de la integral de superficie.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \rightarrow E \oint_s dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3}$$

$$E (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

Y expresado vectorialmente en función del radioversor \hat{r} propio de las coordenadas esféricas:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{r}{R^3} \hat{r}$$

Vemos que el campo en el interior de la esfera aislante cargada uniformemente varía su intensidad en forma lineal a medida que $r \rightarrow R$.

- Zona 2: ($r > R$)

El tratamiento de esta zona y la superficie gaussiana tomada es el mismo que el del ejercicio 4.15, en el cual se analizó el campo eléctrico generado por una esfera conductora cargada, para zonas $r > R$. Se aconseja releer la resolución de ese ejercicio, cuyo resultado es el mismo que el campo eléctrico que generaría una carga puntual con la misma carga concentrada en el centro de la esfera:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Como es de suponer, el campo eléctrico debe variar en forma continua en función de r . Para que esto se cumpla, las expresiones del campo eléctrico para ambas zonas debe converger a un único punto para $r = R$. Esto se puede comprobar realizando el reemplazo en ambas expresiones, con lo que puede obtener la variación en intensidad del campo eléctrico para todo el espacio, en función de la distancia al centro de esfera aislante.

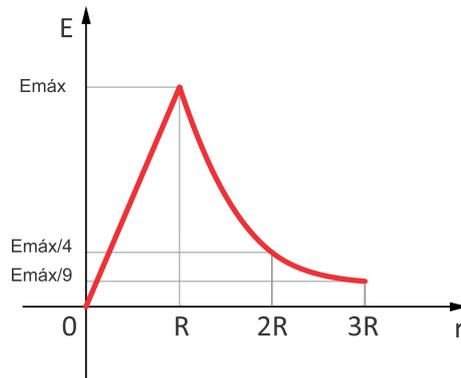


Figura 4.39: Intensidad del campo eléctrico generado por una esfera aislante cargada uniformemente.

4.20. Problema

4.20.1. Enunciado

Un cubo tiene lados con longitud $L = 0,3m$. Se coloca con una esquina en el origen, como se muestra en la figura. El campo eléctrico no es uniforme y está dado por la siguiente expresión:

$$\vec{E}(x, z) = \left(-5x \frac{N}{Cm}\right) \hat{i} + \left(-3z \frac{N}{Cm}\right) \hat{k}$$

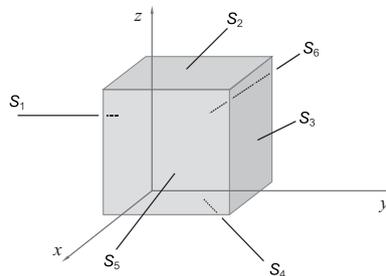


Figura 4.40: Caras del cubo inmerso en un campo eléctrico.

- Calcule el flujo eléctrico a través de cada una de las seis caras del cubo, S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5 y S_6 .
- Determine cuál es la carga eléctrica total dentro del cubo.

4.20.2. Respuesta

a)

$$\phi_{s_1} = 0$$

$$\phi_{s_2} = -0,081 \frac{Nm^2}{C}$$

$$\phi_{s_3} = 0$$

$$\phi_{s_4} = 0$$

$$\phi_{s_5} = -0,135 \frac{Nm^2}{C}$$

$$\phi_{s_6} = 0$$

Siendo el flujo neto:

$$\Phi_E = \sum \phi_i = -0,081 \frac{Nm^2}{C} - 0,135 \frac{Nm^2}{C} = -0,216 \frac{Nm^2}{C}$$

b) La carga neta encerrada por el cubo es negativa, de valor:

$$Q_{enc} = -1,9116 \times 10^{-12} C = -1,9116 pC$$

4.20.3. Solucióna) Se analiza la integral de flujo (Gauss) separando la superficie cerrada en seis superficies abiertas y analizando, para cada una, el producto $\vec{E} \cdot \vec{S}$.

$$1) \vec{S}_1 = S_1(-\hat{j}) \rightarrow \vec{E} \perp \vec{S}_1 \rightarrow \phi_{s_1} = 0$$

$$2) \vec{S}_2 = S_2(\hat{k}) \rightarrow \phi_{s_2} = (\vec{E} \cdot \vec{S}_2)_{z=0,3m}$$

$$\phi_{s_2} = \left[(-5x \frac{N}{Cm})\hat{i} + (-3z \frac{N}{Cm})\hat{k} \right] \cdot [S_2(\hat{k})]$$

$$\phi_{s_2} = [-3(0,3) \frac{N}{C}] [(0,03)^2 m^2] \rightarrow \phi_{s_2} = -0,081 \frac{Nm^2}{C}$$

$$3) \vec{S}_3 = S_3(\hat{j}) \rightarrow \vec{E} \perp \vec{S}_3 \rightarrow \phi_{s_3} = 0$$

$$4) \vec{S}_4 = S_4(-\hat{k}) \rightarrow \phi_{s_4} = (\vec{E} \cdot \vec{S}_4)_{z=0m}$$

$$\phi_{s_4} = \left[(-5x \frac{N}{Cm})\hat{i} + (-3z \frac{N}{Cm})\hat{k} \right] \cdot [S_4(-\hat{k})]$$

$$\phi_{s_4} = [-3(0) \frac{N}{C}] [-(0,03)^2 m^2] \rightarrow \phi_{s_4} = 0$$

$$5) \vec{S}_5 = S_5(\hat{i}) \rightarrow \phi_{s_5} = (\vec{E} \cdot \vec{S}_5)_{x=0,3m}$$

$$\phi_{s_5} = \left[(-5x \frac{N}{Cm})\hat{i} + (-3z \frac{N}{Cm})\hat{k} \right] \cdot [S_5(\hat{i})]$$

$$\phi_{s_5} = [-5(0,3) \frac{N}{C}] [(0,03)^2 m^2] \rightarrow \phi_{s_5} = -0,135 \frac{Nm^2}{C}$$

$$6) \vec{S}_6 = S_6(-\hat{i}) \rightarrow \phi_{s_6} = (\vec{E} \cdot \vec{S}_6)_{x=0m}$$

$$\phi_{s_6} = \left[(-5x \frac{N}{Cm})\hat{i} + (-3z \frac{N}{Cm})\hat{k} \right] \cdot [S_6(-\hat{i})]$$

$$\phi_{s_6} = [-5(0) \frac{N}{C}] [-(0,03)^2 m^2] \rightarrow \phi_{s_6} = 0$$

$$\Phi_E = \sum \phi_i = -0,081 \frac{Nm^2}{C} - 0,135 \frac{Nm^2}{C} = -0,216 \frac{Nm^2}{C}$$

■ La carga neta encerrada resulta:

$$\Phi_E = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = -0,216 \frac{Nm^2}{C}$$

$$Q_{enc} = -0,216 \frac{Nm^2}{C} \epsilon_0 = -0,216 \frac{Nm^2}{C} 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

$$Q_{enc} = -1,9116 \times 10^{-12} C = -1,9116 pC$$

4.21. Problema

4.21.1. Enunciado

Una carga puntual $q_1 = +2,4\mu C$ se mantiene estacionaria en el origen. Una segunda carga puntual $q_2 = -4,3\mu C$ se mueve del punto $(x = 0,150m ; y = 0m)$ al punto $(x = 0,250m ; y = 0,250m)$. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza eléctrica sobre q_2 ?

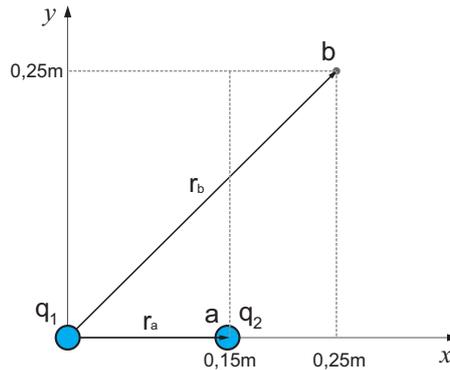


Figura 4.41: Sistema de cargas.

4.21.2. Respuesta

$$W = -0,356J$$

4.21.3. Solución

El trabajo realizado será la diferencia entre los niveles de energía eléctrica.

$$W = U_a - U_b$$

Siendo la energía potencial electrostática de la carga q_2 : $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$

$$U_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_a} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}} \frac{(2,4\mu C)(-4,3\mu C)}{0,15m} = -0,618J$$

$$U_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_b} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}} \frac{(2,4\mu C)(-4,3\mu C)}{\sqrt{(0,25m)^2 + (0,25m)^2}} = -0,262J$$

$$W = U_a - U_b = (-0,618J) - (-0,262J)$$

$$W = -0,356J$$

4.22. Problema

4.22.1. Enunciado

a) ¿Cuánto trabajo se requiere para empujar dos protones con mucha lentitud desde una separación de $2 \times 10^{-10}m$ (una distancia atómica común) a $3 \times 10^{-15}m$ (una distancia nuclear común)?

b) Si los dos protones se liberan desde el reposo en la distancia más cercana del inciso a), ¿con qué velocidad se moverán cuando alcancen su separación original?

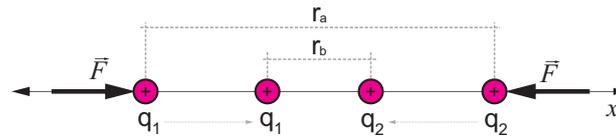


Figura 4.42: Acercamiento de dos cargas iguales (protones).

4.22.2. Respuesta

- a) $W = 7,68 \times 10^{-14} J$
 b) $v = 6,78 \times 10^6 \frac{m}{s}$

4.22.3. Solución

- a) El trabajo requerido es el cambio en la energía potencial del sistema de cargas.

$$W = (2,30766 \times 10^{48}) (3,33 \times 10^{14}) J$$

$$W = \Delta U = U_{r_b} - U_{r_a}$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r_b} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r_a} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$

$$W = \frac{(1,602 \times 10^{-19} C)^2}{4\pi \cdot 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}} \left(\frac{1}{3 \times 10^{-15} m} - \frac{1}{2 \times 10^{-10} m} \right)$$

$$W = 7,692 \times 10^{-14} J$$

- b) La variación de energía potencial electrostática se transformará en una variación de energía cinética, repartida entre ambas cargas, por lo que:

$$\Delta U = K_1 + K_2$$

$$\Delta U = 2K = 2 \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

$$v = \sqrt{\frac{\Delta U}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{7,692 \times 10^{-14} J}{1,67 \times 10^{-27} kg}}$$

$$v = 6,78 \times 10^6 \frac{m}{s}$$

4.23. Problema**4.23.1. Enunciado**

¿Qué tan lejos de una carga puntual de $-7,2\mu C$ debe situarse una carga puntual de $+2,3\mu C$ para que la energía potencial eléctrica U del par de cargas sea $-0,4J$? (Considere U igual a cero cuando las cargas tengan separación infinita.)

4.23.2. Respuesta

$$d = 0,372m$$

4.23.3. Solución

Partiendo de la definición de energía potencial electrostática,

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

$$r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{U}$$

$$r = \frac{1}{4\pi (8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2})} \frac{(-7,2\mu C)(+2,3\mu C)}{-0,4J}$$

$$r = 0,37226m$$

4.24. Problema**4.24.1. Enunciado**

Una carga de $28nC$ se coloca en un campo eléctrico uniforme que está dirigido verticalmente hacia arriba y tiene una magnitud de $4 \times 10^4 \frac{V}{m}$. ¿Qué trabajo hace la fuerza eléctrica cuando la carga se mueve:

- $0,450m$ hacia la derecha.
- $0,670m$ hacia arriba.
- $2,60m$ con un ángulo de 45° hacia abajo con respecto a la horizontal?

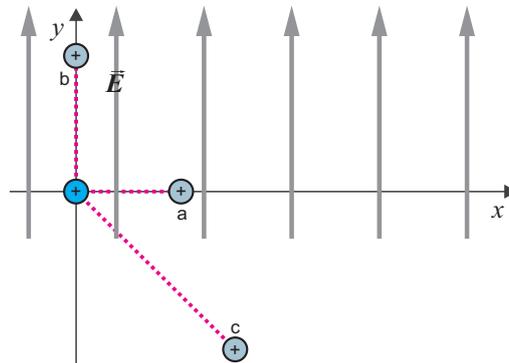


Figura 4.43: Desplazamiento de una carga.

4.24.2. Respuesta

- $W = 0J$
- $W = 7,5 \times 10^{-4}J$
- $W = -2,06 \times 10^{-3}J$

4.24.3. Solución

Partimos de la definición de potencial eléctrico V

$$V = \frac{W_{a \rightarrow b}}{q}$$

Despejando W y reemplazando $V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$W_{a \rightarrow b} = qV = q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$a) W_{a \rightarrow b} = q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_a^b (E \hat{j}) \cdot (dl \hat{i}) = 0$$

ya que el producto escalar $(\hat{j}) \cdot (\hat{i}) = 0$

$$b) W_{a \rightarrow b} = q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_a^b (E \hat{j}) \cdot (dl \hat{j}) = qE \int_a^b dl = qEL$$

$$W_{a \rightarrow b} = (28 \times 10^{-9} C) (4 \times 10^4 \frac{N}{C}) (0,670m) = 7,5 \times 10^{-4} J$$

c) En este caso debe considerarse que sólo la componente vertical del desplazamiento contribuye al trabajo.

$$W_{a \rightarrow b} = q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_a^b (E \hat{j}) \cdot (dl_x \hat{i} - dl_y \hat{j}) = qE \int_a^b -dl_y = -qEL_y = -qEL \cos(45)$$

$$W_{a \rightarrow b} = -(28 \times 10^{-9} C) (4 \times 10^4 \frac{N}{C}) (2,6m) \cos(45) = -205,9 \times 10^{-5} J = -2,059 \times 10^{-3} J$$

4.25. Problema

4.25.1. Enunciado

Dos cargas puntuales $q_1 = +2,4nC$ y $q_2 = -6,5nC$ están separadas $0,1m$. El punto A está a la mitad de la distancia entre ellas; el punto B está a $0,08m$ de q_1 y $0,06m$ de q_2 . Considere el potencial eléctrico como cero en el infinito. Determine:

- El potencial en el punto A
- El potencial en el punto B
- El trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una carga de $2,50nC$ que viaja del punto B al punto A .

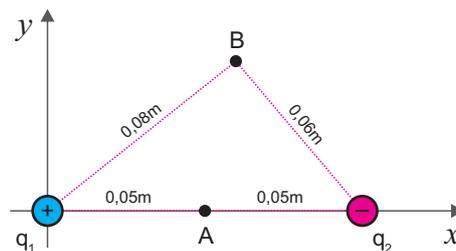


Figura 4.44: Sistema de cargas.

4.25.2. Respuesta

- $V_A = -737V$
- $V_B = -704V$
- $W_{b \rightarrow a} = 8,2 \times 10^{-8} J$

4.25.3. Solución

Partimos de la definición de potencial eléctrico debido a una carga.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Y para el caso de tener dos cargas, se aplica el principio de superposición.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right)$$

$$a) V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi(8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2})} \left(\frac{+2,4 \times 10^{-9} C}{0,05m} + \frac{-6,5 \times 10^{-9} C}{0,05m} \right)$$

$$V_A = -737,33V$$

$$b) V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi \left(8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \right)} \left(\frac{+2,4 \times 10^{-9} C}{0,08 m} + \frac{-6,5 \times 10^{-9} C}{0,06 m} \right)$$

$$V_B = -704,36 V$$

$$c) W_{b \rightarrow a} = q(V_B - V_A)$$

$$W_{b \rightarrow a} = (2,5 \times 10^{-9} C) [(-704,36 V) - (-737,33 V)]$$

$$W_{b \rightarrow a} = 8,2425 \times 10^{-8} J$$

4.26. Problema

4.26.1. Enunciado

Una carga eléctrica total de $3,5 nC$ está distribuida de manera uniforme sobre la superficie de una esfera de metal con radio de $24 cm$. Si el potencial es igual a cero en un punto en el infinito, encuentre el valor del potencial a las siguientes distancias desde el centro de la esfera:

- $48 cm$
- $24 cm$
- $12 cm$

4.26.2. Respuesta

- $V_a = 65,6 V$
- $V_b = 131 V$
- $V_c = 131 V$

4.26.3. Solución

Como se vio oportunamente, el campo eléctrico en zonas exteriores a la esfera cargada ($r > R$) es idéntico al que generaría una carga puntual que encierre la misma carga. Como el campo eléctrico es el mismo, el potencial eléctrico también lo será, de manera que:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

$$a) V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_a} = \frac{1}{4\pi \left(8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \right)} \frac{3,5 \times 10^{-9} C}{0,48 m} = 65,5 V$$

$$b) V_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_b} = \frac{1}{4\pi \left(8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \right)} \frac{3,5 \times 10^{-9} C}{0,24 m} = 131 V$$

c) $V_c = V_b$ ya que el punto c se encuentra dentro de la esfera conductora y en un material conductor el potencial eléctrico es constante (lo que implica que el campo eléctrico es nulo en su interior).

4.27. Problema

4.27.1. Enunciado

Un alambre muy largo tiene una densidad lineal de carga uniforme λ . Se utiliza un voltímetro para medir la diferencia de potencial y se encuentra que cuando un sensor del instrumento se coloca a $2,50 cm$ del alambre y el otro sensor se sitúa $1 cm$ más lejos del alambre, el aparato lee $575 V$.

- ¿Cuál es el valor de λ ?
- Si ahora se coloca un sensor a $3,5 cm$ del alambre y el otro $1,0 cm$ más lejos, ¿el voltímetro leerá $575 V$? Si no es así, ¿la lectura estará por encima o por debajo de $575 V$? ¿Por qué?
- Si se sitúan ambos sensores a $3,50 cm$ del alambre pero a $17,0 cm$ uno de otro, ¿cuál será la lectura del voltímetro?

4.27.2. Respuesta

- $\lambda = 9,5 \times 10^{-8} \frac{C}{m}$
- La lectura será menor que $575 V$.
- $V_{ab} = 0 V$

4.27.3. Solución

a)

Partimos del campo eléctrico generado por un hilo cargado con densidad de carga lineal λ .

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

A partir del campo eléctrico, deducimos la expresión de la diferencia de potencial entre dos puntos.

$$V = - \int E dr = - \int \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right) dr$$

$$V = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r)$$

$$\Delta V = V_a - V_b = \left(- \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_a) \right) - \left(- \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_b) \right)$$

$$\Delta V = V_a - V_b = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_b}{r_a} \right)$$

De donde despejamos λ .

$$\lambda = \frac{\Delta V \ 2\pi\epsilon_0}{\ln \left(\frac{r_b}{r_a} \right)}$$

$$\lambda = \frac{(575V) \ 2\pi\epsilon_0}{\ln \left(\frac{3,5cm}{2,5cm} \right)}$$

$$\lambda = 9,5 \times 10^{-8} \frac{C}{m}$$

b) El desplazamiento descrito de las puntas de medición equivale a alejar ambas puntas 1cm del hilo cargado, puntos en los que el campo eléctrico tendrá menor intensidad. Por otro lado, la diferencia de potencial generada por un hilo cargado es proporcional al logaritmo natural de la relación entre el punto más lejano y el punto más cercano, por lo que al alejarse, la función arrojará un resultado menor:

$$\Delta V = V_a - V_b = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_b}{r_a} \right)$$

$$\Delta V = \frac{(9,5 \times 10^{-8} \frac{C}{m})}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{4,5cm}{3,5cm} \right) = 429,36V$$

Notar que $\ln \left(\frac{r_b+1}{r_a+1} \right) < \ln \left(\frac{r_b}{r_a} \right)$, es decir que el alejamiento de ambos puntos en la misma medida arroja un resultado menor.

c) $V_{ab} = 0V$ ya que las puntas de medición se encuentran a la misma distancia del hilo cargado, por lo que están al mismo potencial.

4.28. Problema**4.28.1. Enunciado**

El campo eléctrico en la superficie de una esfera de cobre con carga, sólida y con radio de 0,2m es de $3800 \frac{N}{C}$, dirigido hacia el centro de la esfera. ¿Cuál es el potencial en el centro de la esfera si se considera un potencial igual a cero a una distancia infinitamente grande con respecto a la esfera?

4.28.2. Respuesta

$$V = -760V$$

4.28.3. Solución

Dado que el potencial eléctrico en la superficie de la esfera conductora es el mismo que en todo su volumen, incluyendo el centro de la misma, debido a que el campo eléctrico en el interior de un conductor es nulo, el ejercicio se resuelve hallando el potencial en la superficie de la esfera con respecto al potencial en el infinito, considerado nulo.

Para una esfera cargada de radio R , en zonas donde $r > R$, el campo eléctrico resultante es el mismo que generaría una carga puntual con idéntica carga situada en el centro de la esfera. De esta manera:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Y en la superficie de la esfera $r = R = 0,2m$, el mismo toma un valor de $3800 \frac{N}{C}$, entonces, primeramente hallamos el valor de la carga Q .

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \rightarrow Q = E 4\pi\epsilon_0 r^2$$

$$|Q| = \left(3800 \frac{N}{C}\right) 4\pi \left(8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}\right) (0,2m)^2$$

$$|Q| = 16,9 \times 10^{-9}C = 16,9nC$$

Como el campo eléctrico se dirige hacia la esfera, se deduce que la carga debe ser negativa:

$$Q = -16,9 \times 10^{-9}C = -16,9nC$$

La expresión del potencial eléctrico resulta:

$$V = - \int E dr = - \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Por lo que el potencial en la superficie de la esfera (y por ende en toda la esfera, incluyendo el centro de la misma), resulta:

$$V = \frac{1}{4\pi \left(8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}\right)} \frac{(-16,9 \times 10^{-9}C)}{(0,2m)}$$

$$V = -760V$$

4.29. Problema**4.29.1. Enunciado**

Dos placas de metal paralelas, muy grandes, conductoras y de espesor como el que indica la figura, tienen densidades de carga de la misma magnitud pero con signos opuestos. Suponga que están suficientemente cerca como para ser tratadas como placas infinitas ideales. Si se considera el potencial igual a cero a la izquierda de la superficie de la placa negativa, elabore una gráfica del potencial como función de x . Incluya todas las regiones de izquierda a derecha de las placas.

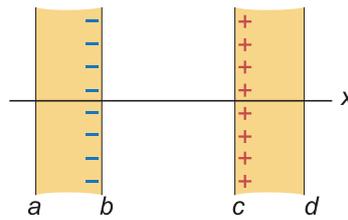


Figura 4.45: Placas cargadas enfrentadas.

4.29.2. Respuesta

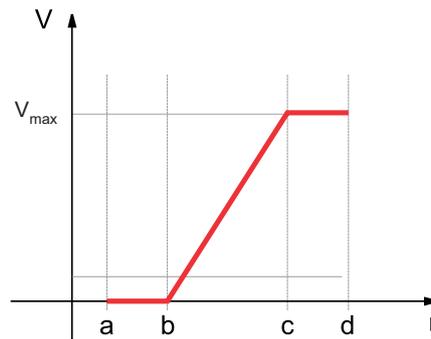


Figura 4.46: Potencial electrostático en función de la distancia normal a las placas.

4.29.3. Solución

La respuesta a este ejercicio tiene base en la relación existente entre el campo eléctrico y el potencial electrostático.

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Sabiendo que para espacial comprendida entre las placas el campo eléctrico tiene intensidad constante, es decir, independiente de la distancia a las mismas, y que fuera de esta región el campo eléctrico es nulo debido a las contribuciones opuestas de cada placa, distinguimos las siguientes zonas con sus correspondientes valores de campo eléctrico.

- $r < a$ A la izquierda de la placa cargada negativamente. $E = 0$ (Por superposición de campos con sentido opuesto).
- $a < r < b$ Dentro del espesor de la placa izquierda: $E = 0$ (El campo E dentro de un conductor siempre el nulo).
- $b < r < c$ Zona entre ambas placas. $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
- $c < r < d$ Dentro del espesor de la placa derecha: $E = 0$ (El campo E dentro de un conductor siempre el nulo).
- $r > d$ A la derecha de la placa cargada positivamente. $E = 0$ (Por superposición de campos con sentido opuesto).

Sabiendo que se debe cumplir la relación $V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ y que el potencial electrostático resulta nulo en el infinito (esto es una convención y la tomaremos para $r \rightarrow -\infty$, entonces:

- $r < a \rightarrow E = 0 \rightarrow V = cte = 0$ (Lo igualamos a cero para que concuerde con el potencial en $r \rightarrow -\infty$).

- $a < r < b \rightarrow E = 0 \rightarrow V = cte = 0$
- $b < r < c \rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Nótese que el vector \vec{E} tiene sentido opuesto al vector $d\vec{l}$ y por ende el signo $(-)$ desaparecerá luego de la integración.

$$V = -\int_{r=b}^{r=c} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} r$$

Esta función, por consideración de continuidad en el potencial a lo largo del eje r , tomará valores $V(r=c) = 0$ y $V(r=c) = V_{max}$ con $V_{max} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (c-b)$

- $c < r < d \rightarrow E = 0 \rightarrow V = cte = V_{max}$
- $r > d \rightarrow E = 0 \rightarrow V = cte = V_{max}$

De esta manera, habiendo separado el problema en las correspondientes zonas del eje r , se halla la representación gráfica del potencial en función de dicha variable.

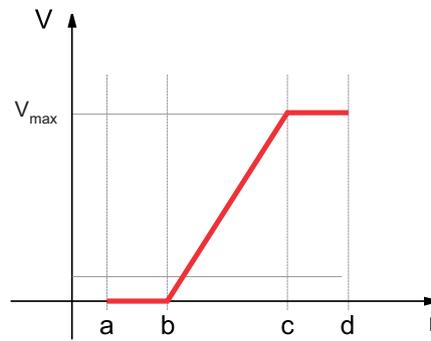


Figura 4.47: Potencial electrostático debido a una distribución de dos placas infinitas con carga opuesta.

4.30. Problema

4.30.1. Enunciado

Dos esferas aislantes idénticas con cargas opuestas, cada una de $r = 50\text{cm}$ de diámetro y con carga uniforme de magnitud $175\mu\text{C}$, están colocadas con sus centros separados por una distancia de $d = 1\text{m}$.

- a) Si se conecta un voltímetro entre los puntos más cercanos (a y b) sobre sus superficies, ¿cuál será la lectura?
- b) ¿Cuál punto, a o b , está en el potencial más grande? ¿Cómo se puede saber esto sin hacer cálculos?

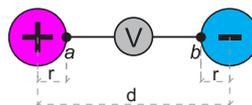


Figura 4.48: Potencial electrostático debido a dos cargas esféricas opuestas.

4.30.2. Respuesta

- a) $V_{ab} = 8,4\text{MV}$
- b) El punto a se encuentra a mayor potencial, ya que $V_a > V_b$.

4.30.3. Solución

a) Debe tenerse presente que para cualquier punto, tanto el campo eléctrico \vec{E} como el potencial electrostático dependen de ambas esferas cargadas, por aplicación del principio de superposición. Claramente, la solución se basa en considerar la carga de cada esfera concentrada en su centro, conclusión obtenida gracias a la ley de Gauss. Siendo esto así, podemos plantear entonces la diferencia de potencial solicitada, tomando las distancias desde los centros de las esferas.

$$V_{ab} = V_a - V_b = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+q)}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{d-r} \right] - \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+q)}{d-r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{r} \right]$$

$$V_{ab} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{-q}{d-r} \right) - \left(\frac{+q}{d-r} + \frac{-q}{r} \right)$$

$$V_{ab} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{-q}{d-r} - \frac{q}{d-r} - \frac{-q}{r} \right)$$

$$V_{ab} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2q}{r} + \frac{-2q}{d-r} \right)$$

$$V_{ab} = \frac{1}{4\pi (8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2})} \left[\frac{2 (175 \times 10^{-6} C)}{0,25m} + \frac{-2 (175 \times 10^{-6} C)}{1m - (0,25m)} \right]$$

$$V_{ab} = \frac{2 (175 \times 10^{-6} C)}{4\pi (8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2})} \left(\frac{1}{0,25m} - \frac{1}{1m - (0,25m)} \right)$$

$$V_{ab} = \frac{(175 \times 10^{-6} C)}{2\pi (8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2})} \left(\frac{1}{0,25m} - \frac{1}{0,75m} \right)$$

$$V_{ab} = 8,4MV$$

b) Por definición, el potencial en el infinito se considera igual a cero. De esta manera, el potencial en el punto a será mayor al potencial del punto b , debido a los signos de las cargas (*ténganse presente que el potencial aumenta en sentido inverso a las líneas de campo eléctrico, que van de la carga positiva a la carga negativa*).

4.31. Problema

4.31.1. Enunciado

Una esfera pequeña con masa de $1,5g$ cuelga de una cuerda entre dos placas verticales paralelas separadas por una distancia de $5,00cm$. Las placas son aislantes y tienen densidades de carga superficial uniformes de $+\sigma$ y $-\sigma$. La carga sobre la esfera es $q = 8,9\mu C$. ¿Cuál diferencia de potencial entre las placas ocasionará que la cuerda forme un ángulo de 30° con respecto a la vertical?

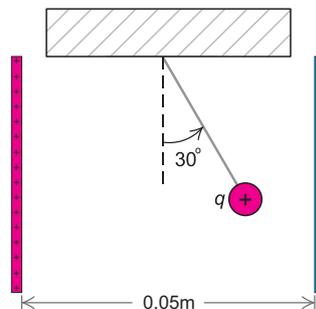


Figura 4.49: Carga suspendida en un campo generado por placas infinitas con carga opuesta.

4.31.2. Respuesta

$$V = 47,73V$$

4.31.3. Solución

Realizamos el diagrama del cuerpo libre para la partícula cargada.

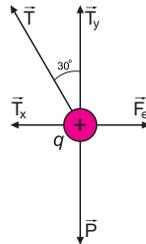


Figura 4.50: Diagrama del cuerpo libre.

Debido a las condiciones estáticas del problema:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow |\vec{T}_x| = |\vec{F}_e|$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow |\vec{T}_y| = |\vec{P}|$$

$$T_x = T \operatorname{sen}(30)$$

$$T_y = T \operatorname{cos}(30)$$

$$P = mg$$

$$F_e = q \cdot E = q \frac{\sigma}{\epsilon_0} = q \cdot \frac{V}{d} \quad (\text{El campo generado por las placas enfrentadas es } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ y que } E = \frac{V}{d}).$$

Reemplazando:

$$T \operatorname{sen}(30) = q \cdot \frac{V}{d}$$

$$T \operatorname{cos}(30) = mg$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$\tan(30) = \frac{q \cdot \frac{V}{d}}{mg} \text{ de donde se despeja el potencial } V.$$

$$V = \frac{\tan(30) mgd}{q}$$

$$V = \frac{\tan(30) (0,0015kg) (9,81 \frac{m}{s^2}) (0,05m)}{(8,9 \times 10^{-6}C)}$$

$$V = 47,73V$$

4.32. Problema**4.32.1. Enunciado**

Cilindros coaxiales.

Un cilindro metálico largo con radio a está apoyado en un soporte aislante sobre el eje de un tubo metálico largo y hueco con radio b . La carga positiva por unidad de longitud sobre el cilindro interior es igual a λ , y en el cilindro exterior hay una carga negativa igual por unidad de longitud.

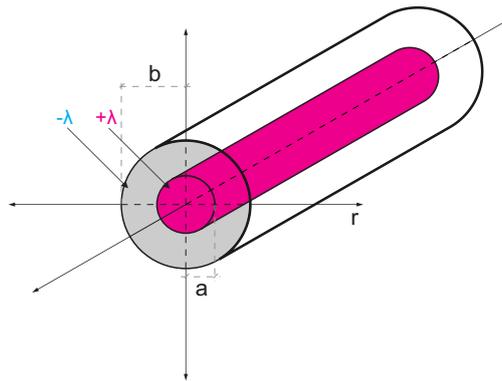


Figura 4.51: Cilindros con simetría axial, cargados.

a) Calcule el potencial $V(r)$ para: $r < a$; $a < r < b$; $r > b$. (Sugerencia: el potencial neto es la suma de los potenciales debidos a los conductores individuales). Considere $V = 0$ en $r = b$.

b) Demostrar que el campo eléctrico en cualquier punto entre los cilindros tiene magnitud: $E(r) = \frac{V_{ab}}{\ln(\frac{b}{a})} \frac{1}{r}$.

4.32.2. Respuesta

$$\begin{aligned} V(r < a) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \\ V(a \leq r \leq b) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{r}\right) \\ V(r > b) &= 0 \end{aligned}$$

4.32.3. Solución

a) La aplicación de la ley de Gauss nos permitirá hallar el campo eléctrico en cada una de las zonas, mientras que la relación $V_{ab} = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$ hará lo propio para poder hallar el potencial.

Como superficie gaussiana, dada la estructura cilíndrica del problema, tomaremos un cilindro de longitud fija L , siendo este un valor cualquiera ya que se cancelará en los resultados, como se verá. La superficie elegida se muestra en el siguiente gráfico.

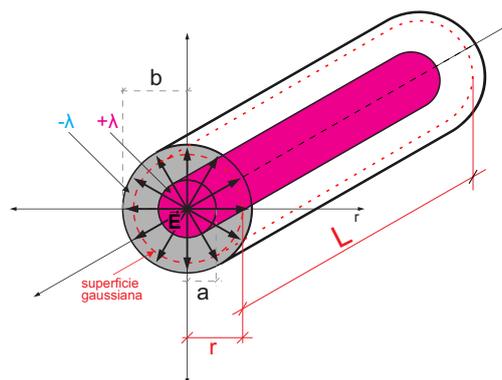


Figura 4.52: Superficie gaussiana aplicada.

Comenzaremos por la zona espacial entre el cilindro macizo conductor interior y el cilindro hueco exterior, es decir $a < r < b$. En dicha zona aplicamos la ley de Gauss.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Nótese que $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cdot \cos(0)$ para todos los puntos, es decir, los vectores resultan paralelos y, para un dado valor de r , el módulo del campo eléctrico E tiene un valor constante, por lo que puede retirarse de la integral. Por otro lado, la carga neta encerrada por la superficie gaussiana encerrada resulta $Q_{enc} = \lambda L$. De esta manera:

$$E \oint_s dS = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

La integral de superficie de un diferencial de superficie no es otra cosa que la superficie completa, en nuestro caso, la superficie de un cilindro de radio r y longitud L , entonces $S = 2\pi rL$.

$$E 2\pi rL = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$E (a \leq r \leq b) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

La aplicación de la ley de Gauss para las otras zonas arroja un valor de campo eléctrico nulo, ya que la carga neta encerrada $Q_{enc} = 0$ es nula. Esto implica que en esas regiones el valor del potencial será constante.

$$E (r < a) = 0 \rightarrow V (r < a) = cte$$

$$E (r > b) = 0 \rightarrow V (r > b) = cte$$

Para el cálculo del potencial electrostático nótese que $\vec{E} \parallel d\vec{r}$, como se aprecia en el gráfico anterior, por lo que el producto punto entre vectores se convierte en un producto entre escalares. La integral definida deberá calcularse con los límites correctos. Toda diferencia de potencial se mide con referencia a un punto en el cual el potencial absoluto es nulo. Para nuestro caso, toda la región $r > b$ puede considerarse con potencial $V (r > b) = 0$, por lo que en la superficie del cilindro hueco de radio b y por consideraciones de continuidad el potencial será $V (b) = 0$. Esto está de acuerdo con el valor del campo eléctrico hallado en la zona, ya que $E (r > b) = 0$, lo que implica $V (r > b) = cte$ y esa constante puede ser nula. Para la zona $a < r < b$ el potencial irá en aumento a medida que $r \rightarrow a$, punto en el cual el potencial será el máximo; el potencial en a se puede calcular como la diferencia de potencial entre el punto a y un punto en el que el potencial sea nulo, como por ejemplo b . Dentro del conductor y en su superficie $r \leq a$ el potencial electrostático resultará entonces $V_{ba} = V_a - V_b$. Calculamos entonces el potencial en las tres regiones:

a) $r \geq b \rightarrow V = 0$

b) $a < r < b$

La diferencia de potencial se tomará como el potencial en r referido al potencial en el punto b .

$$V_{br} = V_r - V_b = - \int_b^r E \cdot dr = - \int_b^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} dr$$

$$V = \left[-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) \right]_{r=b}^{r=r} = \left[+\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) \right]_{r=r}^{r=b} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{r}\right)$$

$$V (a < r < b) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{r}\right)$$

c) $r \leq a$

Para la superficie del conductor cilíndrico macizo de radio a y para todo su interior, el potencial tendrá un valor constante, que referido al punto b , donde el potencial es nulo, se puede hallar de la expresión anterior con $r \rightarrow a$:

$$V (r \leq a) = V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

De esta manera hemos calculado el potencial electrostático en todo el espacio, en función de la distancia radial al origen de coordenadas, cuyo gráfico se muestra a continuación.

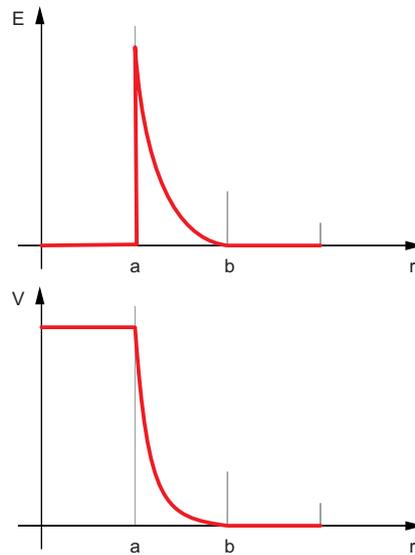


Figura 4.53: Gráficos de E y V en función de r .

b) Para demostrar que la expresión del campo eléctrico en la zona $a < r < b$ es: $E(r) = \frac{V_{ab}}{\ln(\frac{b}{a})} \frac{1}{r}$, reescribimos las expresiones halladas para $E(a \leq r \leq b)$ y para V_{ab} :

$$E(a \leq r \leq b) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Por lo que:

$$\frac{V_{ab}}{\ln(\frac{b}{a})} \frac{1}{r} = \frac{\left[\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right] \frac{1}{r}}{\ln(\frac{b}{a})} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = E(r) \rightarrow E(r) = \frac{V_{ab}}{\ln(\frac{b}{a})} \frac{1}{r}$$