Soluciones 1er parcial de Fisica II
Comisión B2 - Jueves

6 de julio de 2015

1. Ley de Coulomb

1.1. Enunciado

El siguiente conjunto de cargas se encuentra alineado en forma equidistante sobre la horizontal.

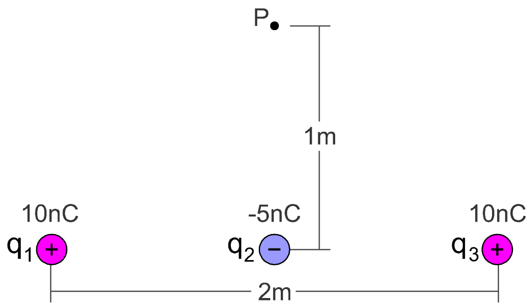

Figura 1: Conjunto de cargas alineadas y equidistantes.

a) Halle el valor del campo eléctrico debido a las tres cargas en el punto P y expréselo vectorialmente (*aclare el sistema de ejes que utiliza*).

b) Si se coloca en el punto P una carga negativa de $1pC$, obtenga la fuerza total que las cargas restantes ejercen sobre ella. *Exprese claramente el módulo y la dirección de dicha fuerza.*

c) Halle el potencial electrostático V debido a las tres cargas del esquema en un punto situado por encima de la carga central q_2, donde la distancia a dicha carga es exactamente la mitad de la distancia a las cargas restantes.

1.2. Respuestas

a) $\vec{E} = 18,64\frac{N}{C}\,\hat{\jmath}$

b) $\vec{F} = -18,64N\,\hat{\jmath}$

c) $V = 77,9V$

1.3. Soluciones

a) Se propone un sistema de ejes coordenados y se analizan los vectores de campo eléctrico $\vec{E}$ debidos a cada carga:

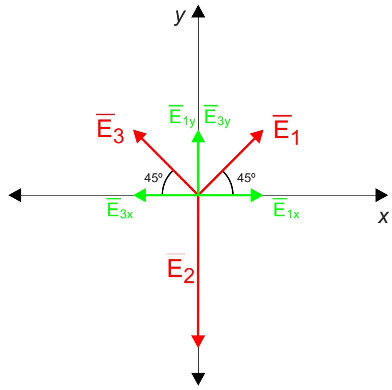

Figura 2: Ejes utilizados y diagrama vectorial.

El campo eléctrico total será la suma vectorial, aplicando el teorema de superposición.

$$\vec{E}_{Total} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

Para realizar la suma deben descomponerse los vectores en sus componentes $\vec{E}_x$ e $\vec{E}_y$.
$\vec{E_1} = k\frac{q_1}{r_1^2}\hat{r_1} = k\frac{q_1}{r_1^2}cos(\alpha)\left(\hat{i}\right) + k\frac{q_1}{r_1^2}sen(\alpha)\left(\hat{j}\right) = k\frac{q_1}{r_1^2}\left[cos(\alpha)\hat{i} + sen(\alpha)\hat{j}\right]$
$\vec{E_2} = k\frac{q_2}{r_2^2}\hat{r_1} = k\frac{q_2}{r_2^2}\left(-\hat{j}\right) = -k\frac{q_2}{r_2^2}\left(\hat{j}\right)$
$\vec{E_3} = k\frac{q_3}{r_3^2}\hat{r_1} = k\frac{q_3}{r_3^2}cos(\alpha)\left(-\hat{i}\right) + k\frac{q_3}{r_3^2}sen(\alpha)\left(\hat{j}\right) = k\frac{q_3}{r_3^2}\left[-cos(\alpha)\hat{i} + sen(\alpha)\hat{j}\right]$

$|\vec{E_1}| = |\vec{E_3}|$, porque son generados por cargas de igual magnitud a una misma distancia $r = \sqrt{2}m$.
$|\vec{E_{x1}}| = |\vec{E_{x3}}|$, por lo que la componente total en el eje x se anula: $E_{Total,x} = 0$

Realizando la suma vectorial:
$\vec{E}_T = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E_3} = k\frac{q_1}{r_1^2}\left[cos(\alpha)\hat{i} + sen(\alpha)\hat{j}\right] - k\frac{q_2}{r_2^2}\hat{j} + k\frac{q_3}{r_3^2}\left[-cos(\alpha)\left(\hat{i}\right) + sen(\alpha)\hat{j}\right]$
$q_1 = q_3 = 10nC$ y $r_1 = r_3 = \sqrt{2}m$
$\vec{E}_T = k\frac{q_1}{r_1^2}\left[cos(\alpha)\hat{i} + sen(\alpha)\hat{j}\right] - k\frac{q_2}{r_2^2}\hat{j} + k\frac{q_1}{r_1^2}\left[-cos(\alpha)\left(\hat{i}\right) + sen(\alpha)\hat{j}\right]$
$\vec{E}_T = k\frac{q_1}{r_1^2}\left[\cancel{cos(\alpha)\hat{i}} + sen(\alpha)\hat{j} - \cancel{cos(\alpha)\left(\hat{i}\right)} + sen(\alpha)\hat{j}\right] - k\frac{q_2}{r_2^2}\hat{j} + k\frac{q_3}{r_3^2}sen(\alpha)\hat{j}$
$\vec{E}_T = k\left[\frac{q_1}{r_1^2}2sen(\alpha) - \frac{q_2}{r_2^2}\right]\hat{j}$
$\vec{E}_T = 9 \times \cancel{10^9}\frac{Nm^2}{C^2}\left[\frac{10\times\cancel{10^{-9}}C}{\left(\sqrt{2}m\right)^2}2sen(45^o) - \frac{5\times\cancel{10^{-9}}C}{(1m)^2}\right]\hat{j}$
$\vec{E}_T = 9\frac{N\cancel{m^2}}{C^{\cancel{2}}}\left[\frac{10\cancel{C}}{2\cancel{m^2}}2sen(45^o) - \frac{5\cancel{C}}{1\cancel{m^2}}\right]\hat{j}$
$\vec{E}_T = 9\frac{N}{C}\left[10sen(45^o) - 5\right]\hat{j}$
$\vec{E}_T = 9\frac{N}{C}\left[10\frac{\sqrt{2}}{2} - 5\right]\hat{j}$
$\vec{E}_T = 45\left[\sqrt{2} - 1\right]\frac{N}{C}\hat{j}$

$$\vec{E}_T = 18,64\frac{N}{C}\hat{j}$$

b)

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$\vec{F} = \left(-1p\cancel{C}\right)\left(18,64\frac{N}{\cancel{C}}\hat{j}\right)$

$$\vec{F} = -18,64pN\,\hat{j} = -18,64 \times 10^{-12}N\,\hat{j}$$

c) La condición implica una distancia sobre la carga q_2 que sea la mitad que la distancia a las demás cargas, es decir: $r_2 = \frac{r_1}{2} = \frac{r_3}{2}$, por lo que, sabiendo que la separación entre las cargas es de $1m$:

$$r_1^2 = (1m)^2 + r_2^2$$

$(2r_2)^2 = (1m)^2 + r_2^2$
$3r_2^2 = (1m)^2$
$r_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}m$
$r_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}m$

$$V_{total} = \sum_{i=1}^{n} V_i = k \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i}$$

$V_{total} = k \left[\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} \right]$
$V_{total} = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \left[\frac{10nC}{\frac{2}{\sqrt{3}}m} + \frac{-5nC}{\frac{1}{\sqrt{3}}m} + \frac{10nC}{\frac{2}{\sqrt{3}}m} \right]$

$$V_{total} = 77,9V$$

2. Ley de Gauss y sus aplicaciones

2.1. Enunciado

a) Halle la expresión del campo eléctrico en función de la distancia radial r generado por una esfera conductora sólida de radio a, cargada con una carga total Q.
b) Realice un gráfico cualitativo del módulo del campo eléctrico E en función de la distancia radial r al centro de la esfera, para valores de r>0.
c) Si la carga Q es de 10pC y el radio de la esfera es a=1cm, halle el valor del potencial a una distancia de 2cm de la superficie de la misma.
d) Realice un esquema de las líneas de campo eléctrico generadas por la esfera y de las líneas equipotenciales, en forma cualitativa.

2.2. Respuestas

a) El campo eléctrico generado por la esfera conductora cargada con carga neta Q resulta:
Para $r < R \rightarrow E = 0$
Para $r \geq R \rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$
b)

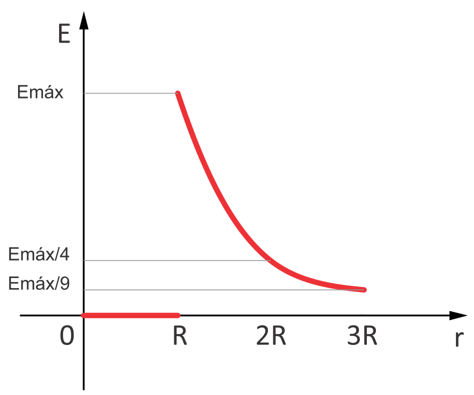

Figura 3: Intensidad del campo eléctrico debida a una esfera conductora cargada en función de la distancia al centro de la misma.

c) $V = 3V$
d)

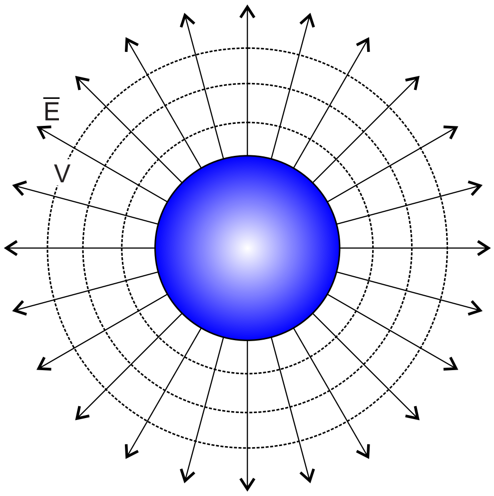

Figura 4: Lineas de campo y lineas equipotenciales.

2.3. Soluciones

a)
La aplicación de la ley de Gauss implica la búsqueda de una superficie (llamada superficie gaussiana) que resulte simétrica con respecto a la distribución de carga dada. Para este caso, la distribución de carga es una esfera y, por ello, la única superficie que resulta simétrica a la misma es otra esfera que comparta el centro; habrá que analizar dos casos bien separados: el campo eléctrico para radios menores al de la esfera y el campo eléctrico para radios mayores al de la misma.
Partimos de la ley de Gauss:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Para $r < R \ \rightarrow Q_{enc} = 0$ y dado que una integral de superficie para un valor de $0 < r < R$ será siempre disntita de cero, el campo eléctrico entonces será nulo: $E = 0$. *Al no haber carga neta encerrada, la ley de Gauss nos permite deducir que en dicha región el campo eléctrico es nulo.*
Para $r > R \rightarrow Q_{enc} = Q$ (la superficie gaussiana encierra toda la carga de las esfera conductora).
Ambas situaciones se representan en la siguiente figura.

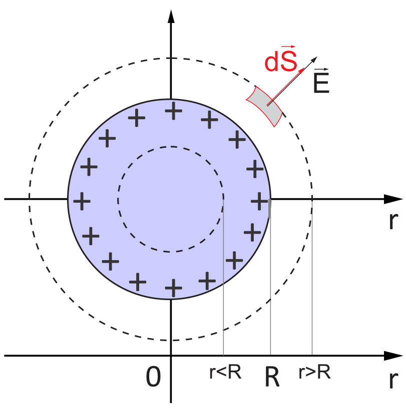

Figura 5: Superficies gaussianas esféricas concéntricas a la esfera cargada.

Es de fundamental importancia notar que, como puede apreciarse en la figura, para la superficie gaussiana cuyo radio $r > R \rightarrow \vec{E} \parallel d\vec{S}$, para cualquier elemento diferencial de superficie de dicha superficie gaussiana. De esta manera, sobre la superficie gaussiana se cumplirá que $\vec{E} \cdot d\vec{S} = |\vec{E}||d\vec{S}|cos\,(0) = |\vec{E}||d\vec{S}|$, por lo que la integración de vectores pasa a ser una integración de escalares. Por otra parte, dado que en todos los puntos pertenecientes a la superficie gaussiana la distancia r a la carga es la misma, la intensidad (y por ende el valor absoluto) del campo eléctrico será la misma; el módulo del vector campo eléctrico $|\vec{E}|$ es una constante y puede entonces reescribirse la ley de Gauss de la siguiente manera:

$$E \oint_s dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

La integración resulta: $\oint_s dS = S = 4\pi r^2$

$$E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Y expresado vectorialmente, en función del versor radial $\hat{r}$:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

Obteniendo entonces el campo eléctrico generado por la esfera conductora cargada para distancias mayores a su radio $(r > R)$.

Resulta muy importante concluir que el campo eléctrico resulta idéntico al que generaría una carga puntual situada en el centro de la esfera conductora cargada, cuya carga sea la misma que la de la esfera.

b)

Debido a la dependencia con la inversa del cuadrado de la distancia r, la intensidad del campo eléctrico responde a la siguiente forma.

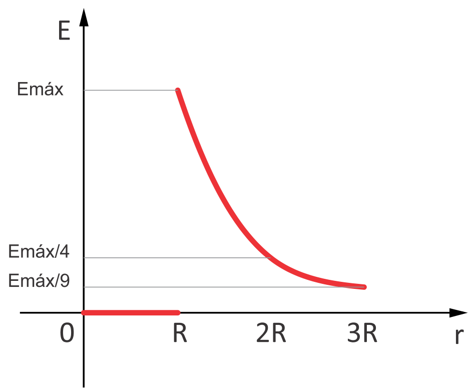

Figura 6: Intensidad del campo eléctrico debida a una esfera conductora cargada en función de la distancia al centro de la misma.

c) El potencial a $2cm$ de la superficie de la esfera es el potencial a $r = 3cm$ del centro de la misma, por lo que:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

$V = k\frac{Q}{r} = \left(9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\right)\frac{\left(10 \times 10^{-12} C\right)}{(0{,}03m)}$

$V = \frac{90}{0{,}03} \times 10^{-3}V$

$$V = 3V$$

d)

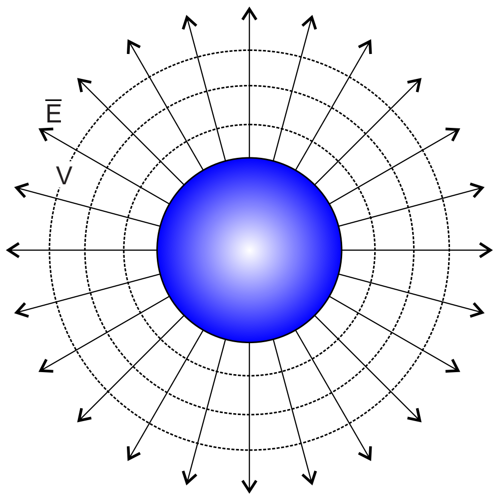

Figura 7: Lineas de campo y lineas equipotenciales.

3. Capacidad.

3.1. Enunciado

Dada la siguiente asociación de capacitores:

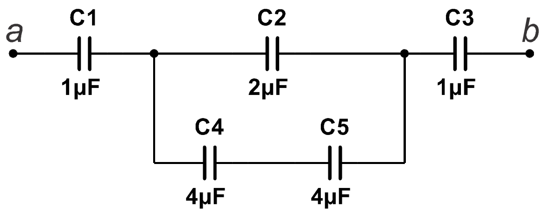

Figura 8: Asociación de capacitores.

a) Halle la capacidad total entre los puntos a y b.

b) Si la diferencia de potencial entre los puntos a y b es de 9V, ¿cuál es la energía total almacenada por el circuito?

c) Si la diferencia de potencial entre los puntos a y b es de 18V, ¿cuál es la diferencia de potencial que mediría entre los terminales del capacitor C5?

3.2. Respuestas

a) $C_T = \frac{4}{9}\mu F$

b) $U = 18\mu J$

c) $V_{C5} = 1V$

3.3. Soluciones

a) Para la resolución usaremos las siguientes reducciones del circuito.

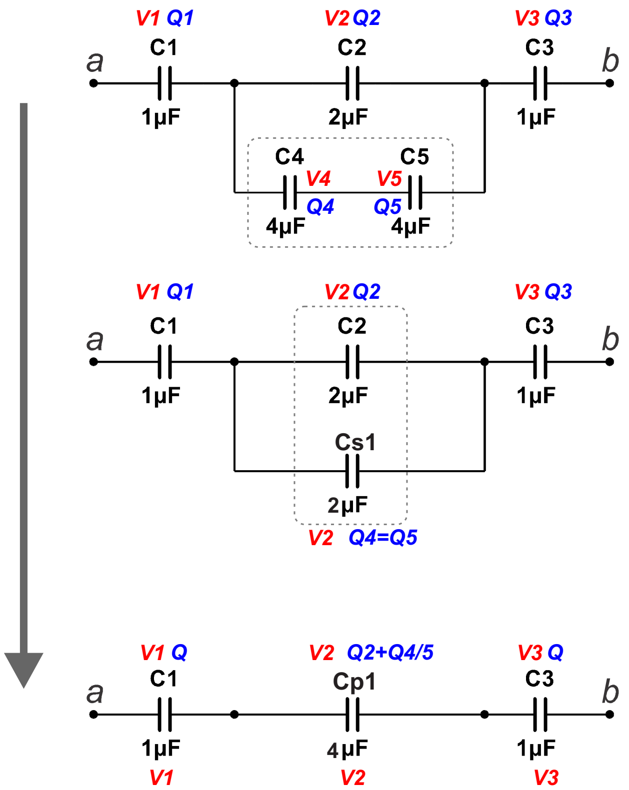

Figura 9:

De acuerdo a la reducción planteada, se tiene:

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{p1}} + \frac{1}{C_3}$$

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_{s1}} + \frac{1}{C_3}$$

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + \frac{1}{\frac{1}{C_4}+\frac{1}{C_5}}} + \frac{1}{C_3}$$

$$C_T = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2+\frac{1}{\frac{1}{C_4}+\frac{1}{C_5}}} + \frac{1}{C_3}}$$

Expresando todos los valores en μF:

$$C_T = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} + \frac{1}{1}}\mu F$$

$$C_T = \frac{4}{9}\mu F$$

b)

$$U = \frac{1}{2} C_T V_{ab}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} \times 10^{-6} F \right) (9V)^2$$

$$U = 18 \times 10^{-6} J = 18 \mu J$$

c) Sabiendo que para una asociación serie de capacitores la carga en cada uno de ellos es la misma, mientras que para una asociación en paralelo la diferencia de potencial es la constante, se tiene entonces para el último circuito equivalente de la figura anterior:

$$V_{ab} = V_1 + V_2 + V_3 = 18V$$

Analizando los capacitores 1 y 3:

$C_1 = \frac{Q_1}{V_1}, C_3 = \frac{Q_3}{V_3}$
$C_1 = C_3$ y $Q_1 = Q_3 = Q_{p1} = Q$ ya que están conectados en serie y es igual a la carga total Q.

Entonces: $V_1 = V_3$
Reemplazando:

$$18V = V_1 + V_2 + V_1$$

$$18V = 2V_1 + V_2$$

Ahora deben realacionarse V_1 y V_2, que también comparten la misma carga Q:
$C_1 = \frac{Q}{V_1}, C_{p1} = \frac{Q}{V_2}$
$C_1 V_1 = C_{p1} V_2$
$1 \mu F V_1 = 4 \mu F V_2$
$V_1 = 4V_2$

$$18V = 2(4V_2) + V_2$$

$$18V = 9V_2$$

$$V_2 = 2V$$

Y $V_2 = 2V = V_{C4} + V_{C5}$ y como $C_4 = C_5$ y $Q_4 = Q_5$ dado que están conectados en serie, la única opción que cumple la igualdad es:

$$V_{C4} = V_{C5} = \frac{V_2}{2} = 1V$$