Soluciones 1er parcial de Fisica II
Comisión B1 - Sábado

6 de julio de 2015

1. Ley de Coulomb

1.1. Enunciado

Dado el siguiente dipolo eléctrico, conformado por dos cargas de valores q y $-q$, separadas por una distancia d, responda:

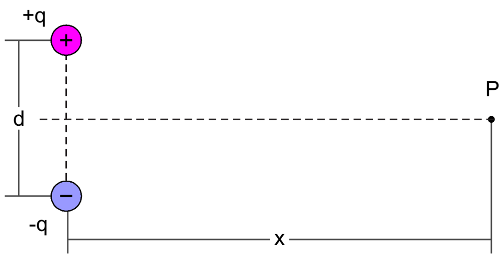

Figura 1: Dipolo.

a) Obtenga la expresión del campo eléctrico generado por el dipolo, en un punto genérico P situado sobre la mediatriz del mismo y a una distancia x, como se aprecia en la figura. Exprésela de acuerdo al sistema de ejes coordenados que proponga para su análisis. Obtenga el valor de dicho campo eléctrico cuando las cargas son de $1\mu C$ (cada una con su signo), la distancia entre las mismas es $d = 1mm$ y la distancia al punto de interés es $x = 1m$. ¿Puede utilizar alguna simplificación de la expresión que obtuvo originalmente debido al valor de los datos brindados?

b) Si se colocara una carga $Q = -10pC$ en el punto $P(x = 1m)$, halle la fuerza eléctrica que el campo existente ejercería sobre la misma. Exprese en forma clara módulo y dirección de la fuerza.

c) Halle el valor del potencial electrostático en dicho punto $P(x = 1m)$. ¿Saca alguna conclusión al respecto?

1.2. Respuestas

a)$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qd}{\left(\frac{d}{2}^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(-\hat{j}\right)$

$\vec{E} = 9\frac{N}{C} \left(-\hat{j}\right)$

b) $\vec{F} = 90 \times 10^{-12} N \, \hat{j}$

c) $V = 0V$, ya que el punto se encuentra sobre la meditriz del dipolo.

1.3. Soluciones

a) Se propone un sistema de ejes coordenados y se analizan los vectores de campo eléctrico $\vec{E}$ debidos a cada carga:

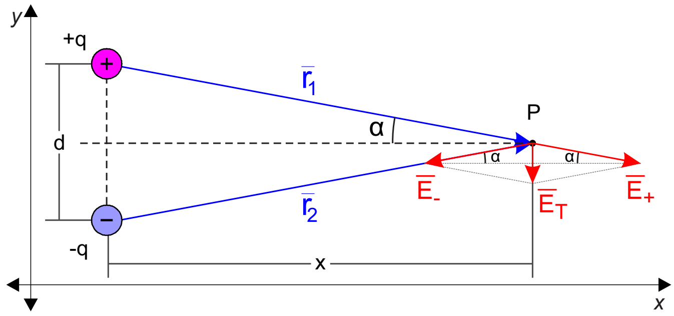

Figura 2: Ejes utilizados y diagrama vectorial.

El campo eléctrico total será la suma vectorial, aplicando el teorema de superposición.

$$\vec{E}_{Total} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

Para realizar la suma deben descomponerse los vectores en sus componentes $\vec{E}_x$ e $\vec{E}_y$.

$$\vec{E}_+ = k\frac{q}{r_1^2}\hat{r_1} = k\frac{q}{r_1^2}cos(\alpha)\left(\hat{i}\right) + k\frac{q}{r_1^2}sen(\alpha)\left(\hat{j}\right) = k\frac{q}{r_1^2}\left[cos(\alpha)\hat{i} + sen(\alpha)\hat{j}\right]$$

$$\vec{E}_- = k\frac{q}{r_2^2}\hat{r_2} = -k\frac{q}{r_2^2}cos(\alpha)\left(\hat{i}\right) + k\frac{q}{r_2^2}sen(\alpha)\left(\hat{j}\right) = k\frac{q}{r_2^2}\left[-cos(\alpha)\hat{i} + sen(\alpha)\hat{j}\right]$$

Donde $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$
$r_1^2 = r_2^2 = r = \sqrt{\frac{d}{2}^2 + x^2}$
$sen(\alpha) = \frac{d/2}{r} = \frac{d}{2\sqrt{\frac{d}{2}^2 + x^2}}$
$|\vec{E_+}| = |\vec{E_-}|$, porque son generados por cargas de igual magnitud a una misma distancia

$$r = \sqrt{\frac{d}{2}^2 + x^2}$$

.

$|\vec{E}_{+x}| = |\vec{E}_{-x}|$, por lo que la componente total en el eje x se anula: $E_{Total,x} = 0$

Sumando vectorialmente:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = k\frac{q}{r^2}\left[\cancel{cos(\alpha)\hat{i}} + sen(\alpha)\left(-\hat{j}\right)\right] + k\frac{q}{r^2}\left[\cancel{cos(\alpha)\left(-\hat{i}\right)} + sen(\alpha)\left(-\hat{j}\right)\right]$$

$$\vec{E}_T = 2k\frac{q}{r^2}sen(\alpha)\,\hat{j} = 2k\frac{q}{\frac{d}{2}^2 + x^2}sen(\alpha)\left(-\hat{j}\right)$$

$$\vec{E}_T = 2k\frac{q}{\frac{d}{2}^2 + x^2}\frac{d}{2\sqrt{\frac{d}{2}^2 + x^2}}\,\hat{j} = k\frac{qd}{\left(\frac{d}{2}^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-\hat{j}\right)$$

$$\vec{E}_T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{\left(\frac{d}{2}^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-\hat{j}\right)$$

Para hallar el valor puede realizarse una simplificación en la fórmula, ya que los datos $x = 1m$ y $d = 1mm$ implican que

$$x \gg \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{d}{2}^2 + x^2 \approx x^2 \Rightarrow \left(\frac{d}{2}^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}} \approx x^3$$

$$\vec{E}_T \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{x^3}\left(-\hat{j}\right)$$

$$\vec{E}_T \approx \left(9\times 10^9\frac{Nm^2}{C^2}\right)\frac{\left(1\times 10^{-6}C\right)\left(1\times 10^{-3}m\right)}{(1m)^3}\left(-\hat{j}\right)$$

$$\vec{E}_T \approx 9\frac{N}{C}\left(-\hat{j}\right)$$

b)

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\vec{F} = \left(-10p\cancel{C}\right)\left[9\frac{N}{\cancel{C}}\left(-\hat{j}\right)\right] = \left(-10\times 10^{-12}\right)\left[9N\left(-\hat{j}\right)\right]$$

$$\vec{F} = 90\times 10^{-12}N\,\hat{j}$$

c)

$$V_{total} = \sum_{i=1}^{n} V_i = k\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$$

Como las cargas son iguales y de signo opuesto, y la distancia de cada carga al punto P es la misma, de valor r:

$$V_{total} = k\left[\frac{q}{r} + \frac{-q}{r}\right] = 0$$

$$V_{total} = 0V$$

El punto P pertenece a la línea equipotencial de $0V$, que es la mediatriz del dipolo.

2. Ley de Gauss y sus aplicaciones

2.1. Enunciado

Dadas dos esferas conductoras concéntricas de radios a y b, cargadas con carga opuesta de valor q, obtenga:

a) Halle, mediante la aplicación de la ley de Gauss, el módulo del campo eléctrico en las tres regiones del espacio que quedan delimitadas por las esferas:

i) $0 < r < a$

ii) $a < r < b$

iii) $r > b$

Realice un gráfico del módulo del campo eléctrico en función de la distancia al centro de las esferas, es decir, para r>0.

b) Deduzca la expresión de la capacidad de este par de esferas en función de sus radios.

c) Obtenga el valor de la capacidad si a=1cm, b=2cm, q=1µC.

2.2. Respuestas

a) i) $0 < r < a$ $E = 0$
ii) $a < r < b$ $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$
iii) $r > b$ $E = 0$

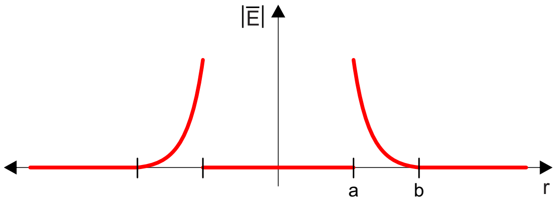

Figura 3: Módulo del campo eléctrico $\vec{E}$ en función de la distancia radial r.

b) $C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$
c) $C = 2,2pF$

2.3. Soluciones

a) Para hallar el campo eléctrico se aplicará la ley de Gauss a cada zona, para lo cual deberán examinarse tres integrales de flujo, cada una sobre la superficie gaussiana que corresponda, que serán esferas concéntricas, como se observa en la siguiente figura.

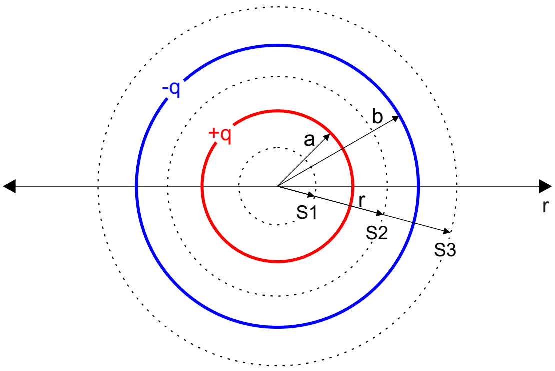

Figura 4: Superficies gaussianas utilizadas.

i) $0 < r < a$

Se aplica la ley de Gauss sobre la superficie esférica S_1:

$$\oint_{s_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

La carga neta que encierra esta superficie es nula $Q_{enc} = 0$, por lo que para que la igualdad se cumpla, el campo eléctrico debe resultar nulo en esta zona $E = 0$.

ii) $a < r < b$
Se aplica la ley de Gauss sobre la superficie esférica S_2:

$$\oint_{s_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

La carga *neta* que encierra esta superficie es $Q_{enc} = q$.

Los vectores $\vec{E}$ y $d\vec{S}$ son paralelos en todos los puntos sobre la superficie gaussiana S_2, como se observa al analizar un diferencial de superficie de la misma y graficar las líneas de campo; asimismo, el módulo del campo eléctrico sobre cualquier punto de esta superficie es constante, ya que todos los puntos se encuentran a una misma distancia de la carga esférica central.

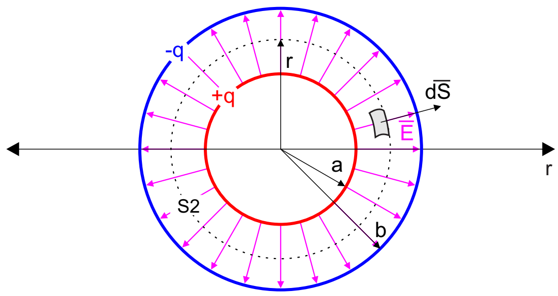

Figura 5: $\vec{E} \parallel d\vec{S}$ y $E = cte$

De esta maneral, la integral de flujo se simplifica notablemente:

$$\oint_{s_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{s_2} E\, dS\, cos(0) = E \oint_{s_2} dS = ES = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

La superficie de la esfera gaussiana es $S = 4\pi r^2$, con lo que:

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Y debido a la distribución radial esférica de las líneas de campo, para expresarlas en forma vectorial se multiplica por el versor $\hat{r}$.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

iii) $r > b$

Se aplica la ley de Gauss sobre la superficie esférica S_3:

$$\oint_{s_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

La carga *neta (suma algebráica de las cargas encerradas)* que encierra esta superficie es nula $Q_{enc} = +q - q = 0$, por lo que para que la igualdad se cumpla, el campo eléctrico debe resultar nulo en esta zona $E = 0$.

El gráfico del módulo del campo eléctrico en función de la distancia al centro r resulta:

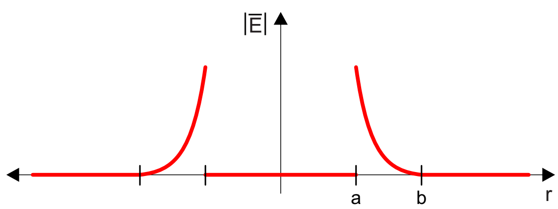

Figura 6: $E = f(r)$

b) La capacidad de este par de esferas cargadas puede hallarse a partir de su definición.

$$C = \frac{Q}{V_{ab}}$$

Siendo Q la carga de una de las esferas, dato conocido, y V_{ab} la diferencia de potencial entre ellas, que resta calcular.

$$V_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

V_{ab} se calculará con la expresión del campo eléctrico válida para la zona de interés $a < r < b$:

$$V_{ab} = \int_a^b \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \right) \cdot (dr\, \hat{r})$$

Recordando que $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$

$$V_{ab} = \int_a^b \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

$$V_{ab} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr$$

$$V_{ab} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right)_a^b$$

$$V_{ab} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Reemplazando en la definición de capacidad:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$$

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$$

c) Reemplazando valores, $a = 0,01m$, $b = 0,02m$ se obtiene el valor de la capacidad de este capacitor esférico.

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} = \frac{4\pi\, 8,85 \times 10^{-12} \frac{F}{m}}{\left(\frac{1}{0{,}01m} - \frac{1}{0{,}02m} \right)}$$

$$C = 2,2 \times 10^{-12} F = 2,2 pF$$

3. Capacidad

3.1. Enunciado

Dada la siguiente asociación de capacitores:

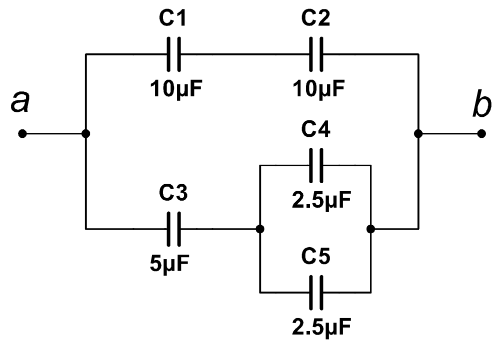

Figura 7: Asociación de capacitores.

a) Halle la capacidad total equivalente entre los puntos a y b.

b) Si la diferencia de potencial entre los puntos a y b, $V_{ab} = 9V$, ¿cuánta energía almacena el circuito?

c) Si la diferencia de potencial $V_{ab} = 5V$, halle la diferencia de potencial entre los terminales del capacitor C_5 y su carga Q_5.

3.2. Respuestas

a) $C_T = 7,5\mu F$
b) $U = 304\mu J$
c) $V_{C5} = 2,5V$
$Q_{C5} = 6,25\mu C$

3.3. Soluciones

a) Para la resolución usaremos las siguientes reducciones del circuito.

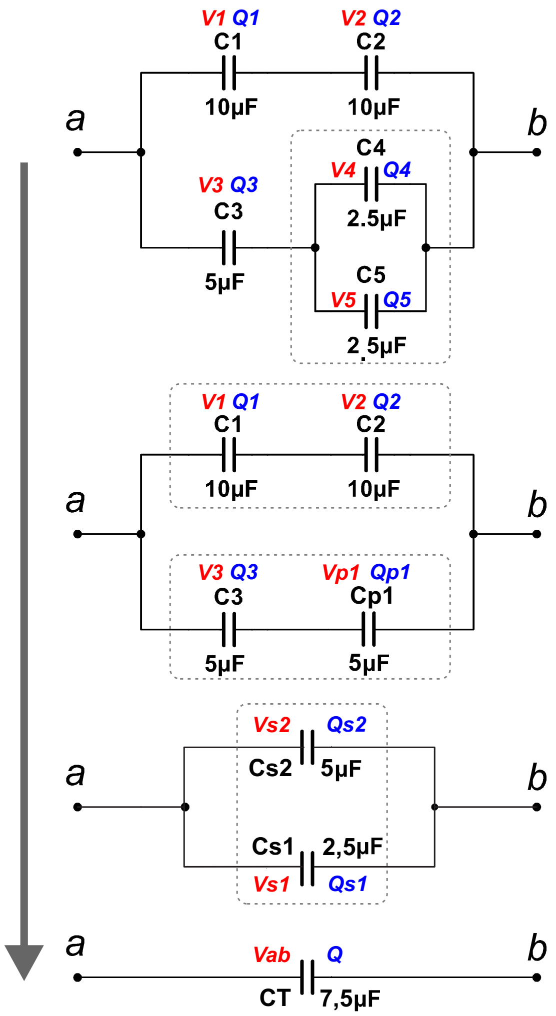

Figura 8: Esquema de simplificación del circuito.

De acuerdo a la reducción planteada, se tiene:

$C_T = C_{S_1} + C_{S_2}$
$C_{S_1} = \frac{1}{\frac{1}{C_3}+\frac{1}{C_{p1}}}$ y $C_{S_2} = \frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}$
$C_{p1} = C_4 + C_5$

Con lo que, reemplazando:

$$C_T = \frac{1}{\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4+C_5}} + \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Expresando todos los valores en μF:

$$C_T = C_T = \left(\frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{2,5+2,5}} + \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}} \right) \mu F$$

$$C_T = C_T = \left(\frac{5}{2} + 5 \right) \mu F$$

$$C_T = \frac{15}{2} \mu F = 7,5 \mu F$$

b)

$$U = \frac{1}{2}C_T V_{ab}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{15}{2} \times 10^{-6}F\right)(9V)^2$$

$$U = 304 \times 10^{-6}J = 304\mu J$$

c) Sabiendo que para una asociación serie de capacitores la carga en cada uno de ellos es la misma, mientras que para una asociación en paralelo la diferencia de potencial es la constante, se tiene entonces:

$$V_{ab} = V_{CS_1} = V_{CS_2} = 5V$$

A su vez,

$$V_{S_2} = V_{C_3} + V_{Cp_1} = 5V$$

Analizando los capacitores C_3 y C_{p_1}:

$C_3 = \frac{Q_3}{V_{C3}}$ y $C_{p_1} = \frac{Q_{p_1}}{V_{Cp_1}}$
$C_3 = C_{p_1} = 5\mu F$ y $Q_3 + Q_{p_1} = Q = C_T V_{ab}$

Entonces: $V_{C3} = V_{Cp_1} = V_{C4} = V_{C5}$
Reemplazando:

$$5V = 2V_{Cp_1}$$

$$V_{Cp_1} = V_{C5} = \frac{5V}{2}$$

$$V_{C5} = 2,5V$$

Para hallar la carga del capacitor C_5 se utiliza nuevamente la definición de capacidad.

$$C_5 = \frac{Q_5}{V_{C_5}}$$

$$Q_5 = C_5 V_{C_5} = 2,5\mu F\, 2,5V$$

$$Q_5 = C_5 V_{C_5} = 6,25\mu C$$