Soluciones 1er parcial de Fisica II
Comisión B1 - Sábado - Tema 1

2 de septiembre de 2015

1. Ley de Coulomb

1.1. Enunciado

Se conoce que el campo eléctrico que genera un hilo de longitud infinita cargado con densidad lineal de carga λ está dado por la expresión $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\hat{\rho}$, siendo ρ la distancia desde un punto cualquiera del espacio al hilo (coordenada radial cilíndrica).

a) Determine el valor de la diferencia de potencial entre los puntos a y b, es decir, $V_{ab} = V_a - V_b$. Las distancias de los puntos al hilo son$a = 1cm$,$b = 3cm$ y $c = 1cm$. La densidad lineal de carga es $\lambda = 1\frac{\mu C}{m}$) ¿Cuál punto se encuentra a mayor potencial?

b) Determine la diferencia de potencial entre los puntos c y b, es decir, $V_{cb} = V_c - V_b$. ¿Obtiene alguna conclusión?

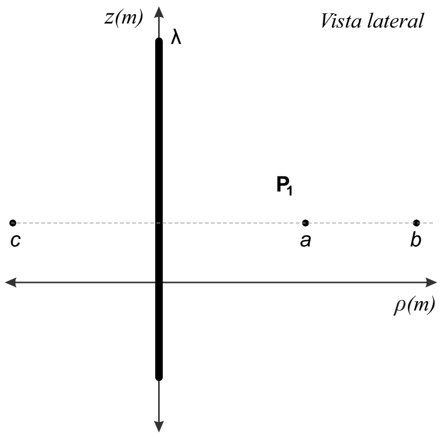

Figura 1: Hilo infinito con carga.

1.2. Respuestas

a) $V_{ab} = 19,75V$. El punto a se encuentra a mayor potencial.

b) $V_{cb} = 19,75V = V_{ab}$. Los puntos a y c se encuentran al mismo potencial, es decir, sobre una superficie equipotencial (para este caso es un cilindro infinito); de esta manera, las diferencias de potencial referidas al mismo punto b son las mismas.

1.3. Soluciones

a)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\hat{\rho}$$

$$V_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dr} = \int_a^b \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\rho} \hat{\rho} \right) \cdot (d\rho\hat{\rho})$$

Dado que $\hat{\rho} \cdot \hat{\rho} = 1$:

$$V_{ab} = \int_a^b \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\rho}{\rho} d\rho$$

$$V_{ab} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

Reemplazando valores:

$$V_{ab} = \frac{1}{4\pi \left(8,85 \times 10^{-12} \frac{F}{m}\right)} ln \left(\frac{0,03m}{0,01m} \right)$$

$$V_{ab} = 19,75V$$

El punto a se encuentra a mayor potencial que el punto b dado que su distancia al hilo cargado con densidad de carga lineal λ positiva es menor. Si la densidad lineal de carga λ fuese negativa, la respuesta sería inversa.

b) Los puntos a y c se encuentran sobre la misma línea y a la misma distancia del hilo cargado ($1cm$). Sólo con estos datos podemos afirmar que estos dos puntos se encuentran sobre una superficie equipotencial y por ende en ellos el valor del potencial es el mismo, por lo que las diferencias de potencial referidas al punto b serán iguales, a saber.

$$V_{cb} = V_{ab} = 19,75V$$

Nótese que para el cálculo de la diferencia de potencial importa la distancia al obtejo con carga para cada uno de los puntos. Si las distacias son las mismas, la diferencia de potencial también lo será.

2. Ley de Gauss y sus aplicaciones

2.1. Enunciado

Dado un capacitor esférico de radios interior y exterior r_a y r_b respectivamente, se pide:
a) Deduzca la expresión de la capacidad.
b) Determine el valor de la capacidad, con vacío entre las esferas conductoras, si $r_a = 1cm$ y $r_b = 1,1cm$.

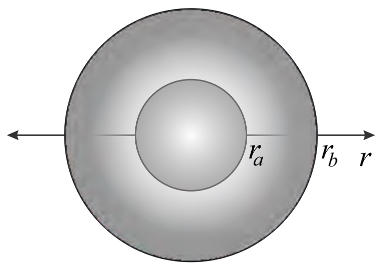

Figura 2: Capacitor esférico.

2.2. Respuestas

a) $C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}}$
b) $C = 12,23pF$

2.3. Soluciones

a) Para hallar la capacidad del par de esferas se procede de la siguiente manera:

1) Se halla el campo eléctrico entre ambas aplicando la ley de Gauss, suponiendo que la esfera interior posee carga $+Q$ y la exterior carga $-Q$.
2) Se deduce la diferencia de potencial entre las esferas integrando la expresión del campo eléctrico hallada anteriormente.
3) A partir de la definición de capacidad se deduce la misma: $C = \frac{Q}{V_{ab}}$

Note que la capacidad del conjunto es independiente del valor de la carga, ya que depende de la relación carga a diferencia de potencial; la suposición en el punto 1 del procedimiento, de asignar un valor Q de carga a cada esfera, termina desapareciendo en el resultado final, ya que la capacidad es una constante del conjunto que depende de sus dimensiones y del dieléctrico, no del valor de la carga y la diferencia de potencial, que pueden tomar distintos valores durante los procesos de carga y descarga (pero su relación siempre da una constante, C).

1) Se aplica la ley de Gauss a la superficie gaussiana planteada en la figura que sigue.

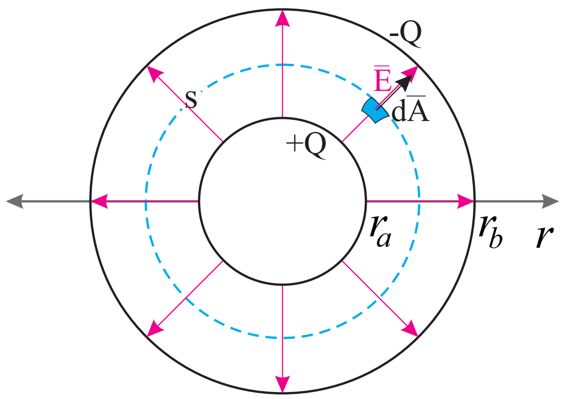

Figura 3: Superficie utilizada para aplicar la ley de Gauss.

La ley de Gauss propone:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

La carga encerrada por la superficie gaussiana S es $q_{enc} = +Q$.
Los vectores de campo eléctrico y diferencial de área son paralelos $\vec{E} \parallel d\vec{A}$, por lo que el producto punto se simplifica a $\vec{E} \cdot d\vec{A} = EdA$.
La intensidad de campo eléctrico es constante sobre cualquier punto de la superficie gaussiana S, ya que todos sus puntos se encuentran a la misma distancia de la esfera cargada que encierra. E resulta entonces constante para la integración.

$$E \oint_S dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$EA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

2) Se halla la diferencia de potencial integrando el campo eléctrico.

$$V_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} E\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr$$

$$V_{ab} = \left[\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right]_{r_a}^{r_b} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

3) Se utiliza la definición de capacidad para hallar su expresión.

$$C = \frac{Q}{V_{ab}}$$

$$C = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)}$$

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}}$$

b) Reemplazando valores se obtiene el valor de la capacidad de este capacitor esférico.

$$C = \frac{4\pi\left(8,85 \times 10^{-12}\frac{F}{m}\right)}{\frac{1}{0{,}01m} - \frac{1}{0{,}011m}}$$

$$C = 12,23pF$$

3. Capacidad y dieléctricos

3.1. Enunciado

Para el siguiente capacitor cilíndrico relleno con dos dieléctricos, de permitividades eléctricas relativas $\varepsilon_{r1} = 10$ y $\varepsilon_{r2} = 50$ y longitud L, rellenado como se muestra en la figura, se pide:

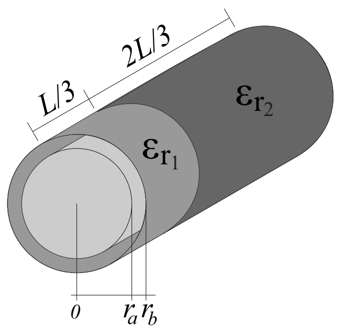

Figura 4: Capacitor cilíndrico con dos dieléctricos.

a) Conociendo que la capacidad de un capacitor cilíndrico de iguales dimensiones, con vacío en todo su interior, está dada por la expresión $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}$, halle la expresión de la capacidad del capacitor cilíndrico con dos dieléctricos ya presentado y determine su valor, si $L = 5cm$, $r_a = 1cm$ y $r_b = 1,1cm$.

3.2. Respuestas

a) $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}\left(\frac{1}{3}\varepsilon_{r1} + \frac{2}{3}\varepsilon_{r2}\right)$
$C = 1,07nF$

3.3. Soluciones

El capacitor propuesto puede visualizarse de la siguiente manera:

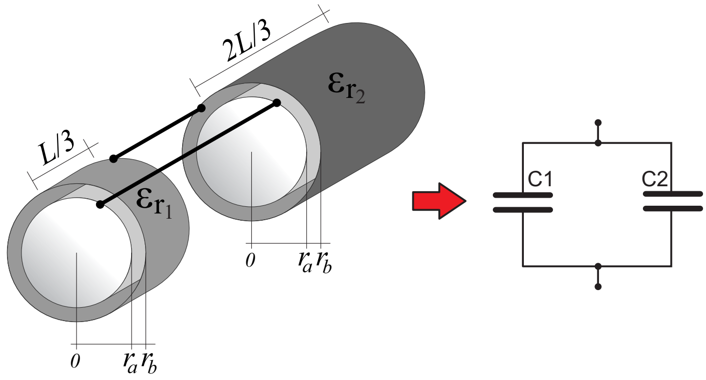

Figura 5: Despliegue del capacitor propuesto.

Lo que nos permite analizarlo como dos capacitores conectados en paralelo, ya que entre ambos comparten la diferencia de potencial que se aplique entre sus placas cilíndricas.

$$C = C_1 + C_2$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\frac{L}{3}}{ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)} + \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}\frac{2L}{3}}{ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}\left(\frac{1}{3}\varepsilon_{r1} + \frac{2}{3}\varepsilon_{r2}\right)$$

Reemplazando valores se obtiene el valor de la capacidad.

$$C = \frac{2\pi\left(8,85\times 10^{-12}\frac{F}{m}\right)(0,05m)}{ln\left(\frac{0{,}011m}{0{,}01m}\right)}\left(\frac{1}{3}10 + \frac{2}{3}50\right)$$

$$C = 1,07nF$$

4. Electrodinámica

4.1. Enunciado

Dado el siguiente circuito de múltiples mallas.

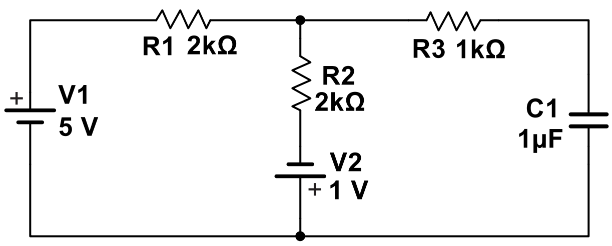

Figura 6: Circuito bajo estudio.

a) Hallar un circuito equivalente, reducido, conformado por una fuente de tensión, una resistencia y el mismo capacitor.

b) ¿Cuánta energía almacena el capacitor en el instante $t = 3\tau$? (Considere al capacitor completamente descargado en el instante $t = 0$).

c) Siendo la expresión de la tensión de carga de un capacitor en función del tiempo, en un circuito RC: $v_c(t) = V(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, donde $\tau = R_{th}C$ es la constante de tiempo. ¿Qué valor de capacidad se necesita para que en el instante $t = 10ms$, $v_c(t = 10ms) = 1V$?

4.2. Respuestas

a)

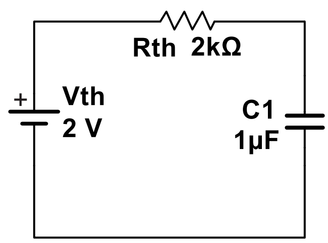

Figura 7: Circuito equivalente de Thevenin.

b) $U = 1,805\mu J$
c) $C = 7,21\mu F$

4.3. Soluciones

a) Se aplica el teorema de Thevenin en los puntos marcados en el circuito siguiente, dejándolo a *circuito abierto*.

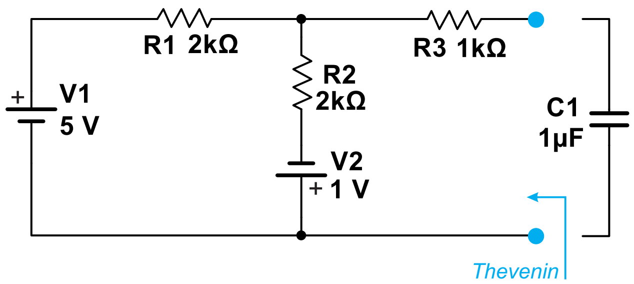

Figura 8: Puntos de aplicación del teorema de Thevenin.

Para hallar la resistencia equivalente de Thevenin R_{th}, se pasivan los generadores, reemplazando los de tensión por un cortocircuito y, en el caso de haber generadores de corriente, por un circuito abierto.

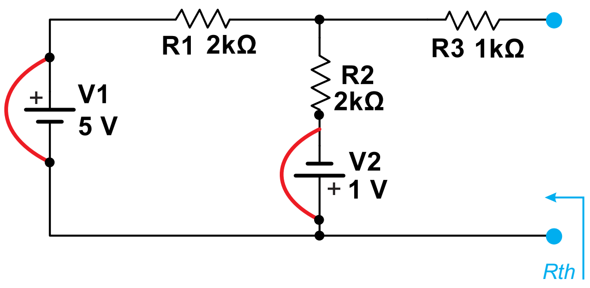

Figura 9: Generadores reemplazados por su resistencia interna ideal.

Quedando entonces el siguiente circuito resistivo.

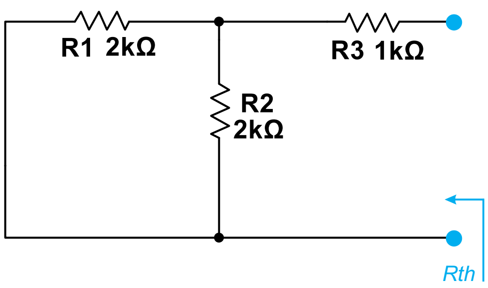

Figura 10: Resistencia vista desde los puntos de interés.

La resistencia equivalente resulta, entonces,

$$R_{th} = R_3 + (R_1 \parallel R_2)$$

$$R_{th} = 1k\Omega + (2k\Omega \parallel 2k\Omega)$$

$$R_{th} = 2k\Omega$$

Para determinar la tensión equivalente de Thevenin volvemos al circuito inicial, donde $V_{th} = V_{ab}$.

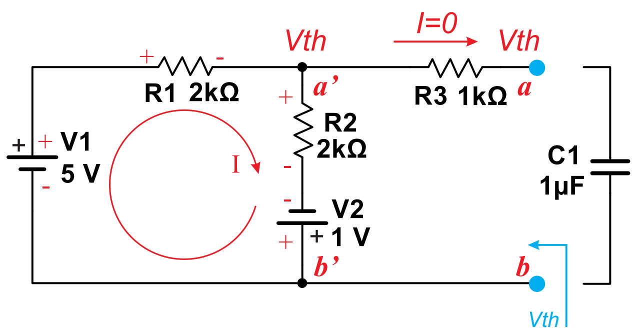

Figura 11: Análisis de V_{th}.

Como la corriente que circula por la resistencia R_3 es nula ($I = 0$), no hay caída de potencial en la misma. Por esto podemos afirmar:

$$V_{th} = V_{ab} = V_{a'b'}$$

donde

$$V_{a'b'} = V_2 + V_{R_2} = V_{th} \tag{1}$$

Para determinar V_{R_2} debemos hallar el valor de la corriente que circula por la única malla de este circuito, malla que recorreremos en sentido horario, por comodidad.

$$I = \frac{V_1 + V_2}{R_1 + R_2}$$

$$I = \frac{5V + 1V}{2k\Omega + 2k\Omega} = 1,5mA$$

con lo que

$$V_{R_2} = IR_2 = 1,5mA\,2k\Omega = 3V$$

Retomando la expresión 1:

$$V_{th} = V_2 + V_{R_2} = -1V + 3V = 2V$$

Nótese como al recorrer la malla en sentido horario la tensión V_2 se considera negativa, mientras que la caída de potencial V_{R_2} se considera positiva.

De esta manera llegamos al circuito equivalente de Thevenin solicitado.

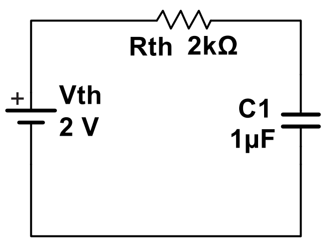

Figura 12: Circuito equivalente.

b) La energía almacenada por un capacitor responde a la expresión:

$$U = \frac{1}{2}CV_c^2 \tag{2}$$

La tensión en el capacitor para este circuito equivalente es función del tiempo y la describe la expresión:

$$V_c(t) = V_{th}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

En el instante $t = 3\tau$:

$$V_c(t = 3\tau) = 2V\left(1 - e^{-\frac{3\tau}{\tau}}\right)$$

$$V_c(t = 3\tau) = 1,9V$$

Reemplazando el valor de la tensión del capacitor en ese instante en la ecuación 2:

$$U = \frac{1}{2}\left(1 \times 10^{-6}F\right)(1,9V)^2$$

$$U = 1,805 \times 10^{-6}J = 1,805\mu J$$

c) La capacidad que se necesita para que en el instante $t = 10ms$, $v_c(t = 10ms) = 1V$ se obtiene despejando $\tau = R_{th}C$ de la expresión de la carga del capacitor en el circuito equivalente hallado.

$$V_c(t) = V_{th}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$1 - \frac{V_c(t)}{V_{th}} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$ln\left[1 - \frac{V_c(t)}{V_{th}}\right] = -\frac{t}{\tau}$$

$$\tau = R_{th}C = -\frac{t}{ln\left[1 - \frac{V_c(t)}{V_{th}}\right]}$$

$$C = -\frac{t}{ln\left[1 - \frac{V_c(t)}{V_{th}}\right]R_{th}}$$

Por lo tanto, si en $t = 10ms$, $v_c(t = 10ms) = 1V$, se obtiene:

$$C = -\frac{1 \times 10^{-3}s}{ln\left[1 - \frac{1V}{2V}\right](2 \times 10^3 \Omega)}$$

$$C = 7,21\mu F$$