1 Ejercicio de mallas

Para el siguiente circuito se pretende hallar las corrientes de malla y la tensión entre los puntos A y B.

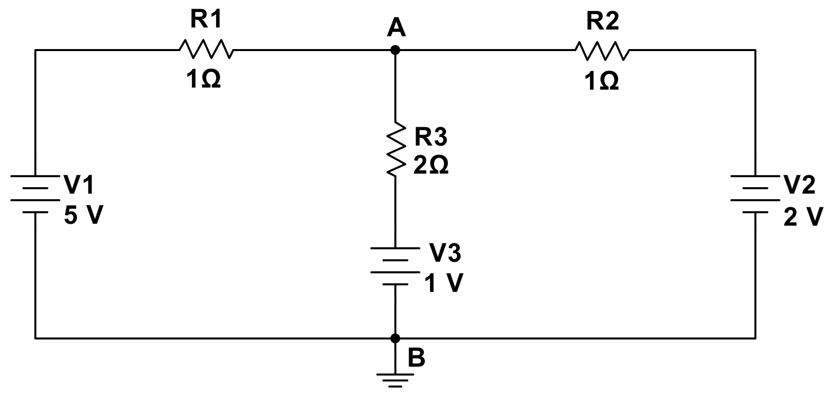

Figure 1: Circuito bajo estudio.

1.1 Resuelto mediante la aplicación de las leyes de Kirchhoff (método de mallas)

Las leyes de Kirchhoff son:

1) Ley de las corrientes de nodo: $\sum I_i = 0$. *La sumatoria de las corrientes que acuden a un nodo resulta nula; para esto pueden consdierarse positivas a las corrientes que ingresan al nodo y negativas a las salientes, o viceversa.*

2) Ley de las tensiones de malla: $\sum V_i = 0$. *La sumatoria de las tensiones al recorrer una malla resulta nula; debe establecerse para su aplicación el sentido de circulación, que se recomienda sea el de la corriente y en función de ese sentido analizar las caídas de potencial.*

Se proponen las corrientes de malla I_1 e I_2 como se indica en el siguiente gráfico, con sentido horario para ambas. En función de el sentido se colocaron los signos de las caídas de potencial en las resistencias.

Al aplicar la sengunda ley de Kirchhoff tomaremos la siguiente convención: se recorrerá la malla en el sentido elegido para la corriente de malla y al atravesar un componente, si se sale por el terminal de mayor potencial, indicado con un signo $+$, se sumará esa tensión y se restará para el caso de salir por el terminal de menor pontencial, indicado con un signo $-$.

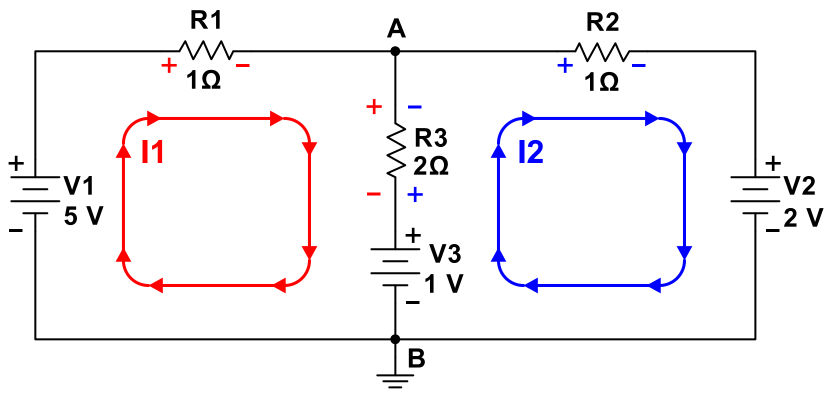

Figure 2: Corrientes de malla propuestas y caídas de potencial.

Malla I) $V_1 - V_{R_1} - V_{R_3} - V_3 = 0$
Malla II)$V_3 - V_{R_3} - V_{R_2} - V_2 = 0$

Para componentes por los que circule más de una corriente, como el caso de la resistencia R_3, la corriente de referencia será la corriente de la malla que se está analizando; las demás corrientes se sumarán o restarán a ella dependiendo de sus sentidos con respecto a la corriente de referencia.

I) $V_1 - I_1R_1 - (I_1 - I_2)R_3 - V_3 = 0$
II)$V_3 - (I_2 - I_1)R_3 - I_2R_2 - V_2 = 0$

I) $V_1 - V_3 - I_1(R_1 + R_3) + I_2R_2 = 0$
II)$V_3 - V_2 + I_1R_3 - I_2(R_2 + R_3) = 0$

I) $5 - 1 - 3I_1 + 2I_2 = 0$
II)$1 - 2 + 2I_1 - 3I_2 = 0$

I) $4 - 3I_1 + 2I_2 = 0$
II)$-1 + 2I_1 - 3I_2 = 0$

Se despejaI_1 de la ecuación de malla I.
$I_1 = \frac{4+2I_2}{3}$
Se reemplaza I_1 en la ecuación de malla II para hallar I_2.

II)$-1 + 2I_1 - 3I_2 = 0$
II)$-1 + 2\left(\frac{4+2I_2}{3}\right) - 3I_2 = 0$
II)$-1 + \frac{8}{3} + \frac{4}{3}I_2 - 3I_2 = 0$
II)$-\frac{3}{3} + \frac{8}{3} + \frac{4}{3}I_2 - \frac{9}{3}I_2 = 0$
II)$-3 + 8 + 4I_2 - 9I_2 = 0$
II)$5 - 5I_2 = 0$

$$I_2 = 1A$$

Se reemplaza I_2 en la ecuación de malla I despejada para hallar I_1:
$I_1 = \frac{4+2I_2}{3} = \frac{4+2(1)}{3}A = \frac{6}{3}A$

$$I_1 = 2A$$

Halladas las corrientes de malla, para encontrar la tensión entre los puntos A y B V_{AB} debemos hallar el valor de la corriente que circula por la rama central, a través de la resistencia R_3, a fin de conocer la caída de tensión sobre ella. Para esto hacemos uso de la primera ley de Kirchhoff, que indica que la sumatoria de las corrientes de nodo es nula. Para esto, planteamos un sentido para I_3; en caso de obtener un resultado positivo, esto indicará que el sentido tomado fue el correcto, mientras que un signo negativo en el resultado final indicará que el sentido de circulación real de la corriente I_3 es el opuesto al escogido.

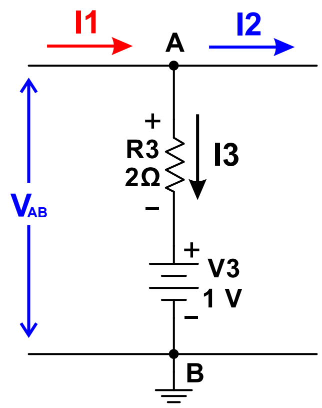

Figure 3: Análisis del nodo A

$I_1 - I_2 - I_3 = 0$
$I_3 = I_1 - I_2 = 2A - 1A$

$$I_3 = 1A$$

$V_{AB} = V_3 + V_{R_3} = V_3 + I_3R_3$
$V_{AB} = 1V + 1A\,2\Omega = 1V + 2V$

$$V_{AB} = 3V$$

1.2 Resuelto mediante la aplicación del corolario de los teoremas de Thevenin y Norton

Para aplicar el corolario de los teoremas de Thevenin y Norton, redibujaremos el circuito original para facilitar la comprensión del procedimiento.

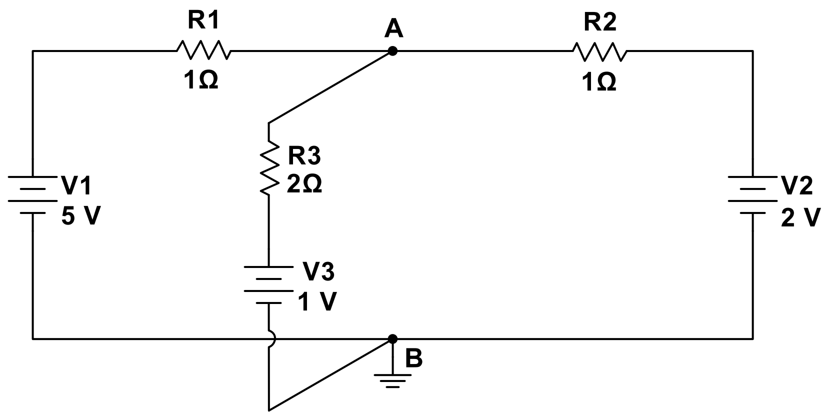

Figure 4: Circuito original redibujado.

El corolario propone que la tensión entre los puntos A y B, es decir, V_{AB} resulta:

$$V_{AB} = I_{CC}R_{Th}$$

Donde:

I_{cc} es la corriente de cortocircuito, resultante de cortocircuitar los puntos de interés, A y B.

R_{Th} es la resistencia equivalente de Thevenin, medida desde los puntos de interés, A y B, obtenida al reemplazar los generadores por su resistencia interna. *Para este caso, como son generadores ideales de tensión, su resistencia interna es nula, por lo que se reemplazan por cortocircuitos.*

Se halla la corriente I_{cc}:

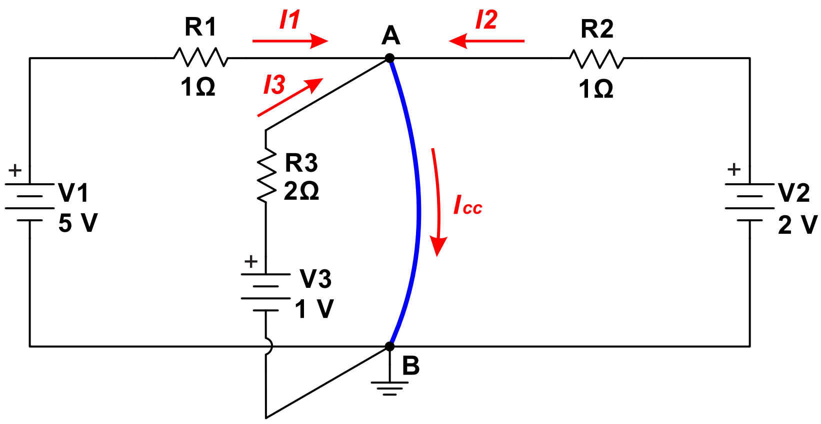

Figure 5: Cortocircuito para hallar Icc

De la primera ley de Kirchhoff (corrientes nodo) deducimos:

$I_1 + I_2 + I_3 - I_{cc} = 0$

$I_{cc} = I_1 + I_2 + I_3$

$I_{cc} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}$

$I_{cc} = \frac{5V}{1\Omega} + \frac{2V}{1\Omega} + \frac{1V}{2\Omega}$

$I_{cc} = 5A + 2A + 0,5A$

$$I_{cc} = 7,5A$$

Hallamos la resistencia equivalente de Thevenin R_{Th}:

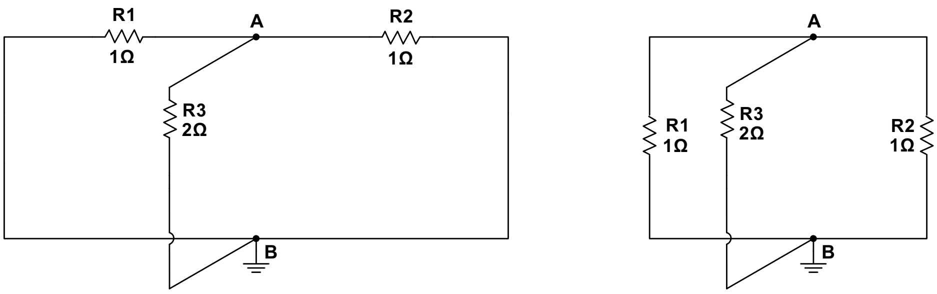

Figure 6: Análisis de la resistencia equivalente de Thevenin

Se observa que al reemplazar los generadores de tensión por cortocircuitos, la resistencia equivalente observada desde los puntos AB resulta el paralelo de las tres resistencias del circuito.

$\frac{1}{R_{Th}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

$\frac{1}{R_{Th}} = \frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{1\Omega}$

$R_{Th} = \frac{1}{\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{1\Omega}}$

$$R_{Th} = \frac{2}{5}\Omega = 0,4\Omega$$

Aplicando el corolario:

$$V_{AB} = I_{CC}R_{Th}$$

$$V_{AB} = (7,5A)\,(0,4\Omega)$$

$$V_{AB} = 3V$$

1.3 Conclusiones

Se aprecia claramente la eficiencia de la aplicación del corolario de Thevenin y Norton para hallar la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera de un circuito conformado por más de una malla, donde la aplicación directa de la ley de Ohm no puede realizarse, en comparación con la aplicación del método de mallas, que resulta mucho más extenso incluso para este sencillo ejemplo.