Física II
Ecuaciones de Maxwell

Ingeniería Electrónica
Departamento de Ciencias Aplicadas y Tecnología
Universidad Nacional de Moreno

30 de noviembre de 2015

Índice

1. Repaso de las ecuaciones

1.1. Ley de Gauss para el campo electrostático

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{1.1}$$

> *«El flujo electrostático sobre una superficie cerrada es proporcional a la carga neta encerrada por la misma.»*

Esta ley nos permite calcular con facilidad el campo eléctrico $\vec{E}$ de una distribución de carga dada, cuando la misma permite plantear una superficie gaussiana cerrada que presente completa simetría con respecto a dicha distribución de cargas. De esa manera el cálculo de la integral se simplifica enormemente y puede hallarse $\vec{E}$.

1.2. Ley de Gauss para el campo magnetostático

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{1.2}$$

> *«El flujo magnetostático sobre una superficie cerrada es siempre igual a cero, dado que no existen monopolos magnéticos.»*

Esta ley justifica matemáticamente la inexistencia de monopolos magnéticos mediante el análisis del flujo magnetostático sobre una superficie cerrada, que siempre resulta igual a cero, ya que la cantidad de líneas de campo magnético que salen de la superficie resulta igual a la cantidad entrante, por ser la superficie cerrada (nótese la integral de superficie cerrada).

1.3. Ley de Faraday-Lenz

$$\varepsilon = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

$$\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{1.3}$$

> *«Una variación temporal del flujo magnético genera una fuerza electromotriz (fem) inducida, cuyo sentido es tal que se opone a la causa que la produjo.»*

Esta ley nos permite calcula la fem inducida debida a variones de cualquiera de los tres factores que intervienen en el cálculo del flujo: $\vec{B}$ variable con respecto al tiempo, $\vec{S}$ variable con respecto al tiempo o el ángulo θ entre ellos variable con respecto al tiempo. El último caso citado, es el caso de un alternador (generador de AC) en el que el ángulo varía con respecto al tiempo de acuerdo a $\theta = \omega t$.

1.4. Ley de Ampere

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \tag{1.4}$$

> *«La circulación (integral de línea cerrada) del campo magnético (densidad de flujo magnético $\vec{B}$) es proporcional a la corriente neta encerrada por la trayectoria de integración.»*

Esta ley nos permite calcula con facilidad el campo magnetosático (densidad de flujo magnético $\vec{B}$) generado por un elemento de corriente (un conductor portador de corriente) a una distancia dada, planteando una trayectoria de integración que incluya al punto de interés y que llamamos «trayectoria amperiana», que además encierre a la corriente generadora del campo y presente completa simetría con respecto a ella.

2. Operador vectorial nabla ∇

2.1. Definición

Nabla ∇ es un operador vectorial dado por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

2.2. Gradiente ∇V

El *gradiente de un campo escalar* dado V resulta

$$V = V_x + V_y + V_z$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V_x}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\hat{k}$$

El gradiente de un campo escalar arroja como resultado un campo vectorial cuya dirección es la de mayor rapidez de incremento.

2.3. Divergencia $\nabla \cdot \vec{E}$

La *divergencia de un campo vectorial* dado $\vec{E}$ resulta

$$\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

La divergencia de un campo vectorial arroja como resultado un valor escalar, que da idea de la existencia de fuentes (divergencia mayor a cero) o sumideros (divergencia menor a cero), es decir, puntos de donde emergen lineas de campo o puntos donde confluyen.

2.4. Rotor $\nabla \times \vec{E}$

El *rotor de un campo vectorial* dado $\vec{E}$ resulta

$$\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

El rotor de un campo vectorial muestra la tendencia del mismo a inducir rotación alrededor de un punto.

2.5. Laplaciano $\nabla^2 V$

El *laplaciano de un campo escalar* dado V resulta

$$V = V_x + V_y + V_z$$

$$\nabla^2 = (\nabla \cdot \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}$$

El laplaciano puede interpretarse como la divergencia de un campo de gradientes. Un ejemplo práctico es la aceleración de partículas en el espacio, que es la «variación de la variación» (variación de velocidad) del espacio con respecto al tiempo.

3. Teoremas de Gauss y Stokes

3.1. Teorema de Gauss-Ostrogradsky o Teorema de la divergencia

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \left(\nabla \cdot \vec{A}\right) dv$$

«El flujo neto (integral de superficie cerrada) de un campo vectorial $\vec{A}$ es igual la integral de volumen de la divergencia de dicho vector. El volumen V es el encerrado por la superficie cerrada S.»

Este teorema permite, para un dado campo vectorial, pasar de una integral de superficie cerrada S a una integral de volumen V.

3.2. Teorema de Stokes o Teorema del rotor

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\nabla \times \vec{A}\right) \cdot d\vec{S}$$

«La circulación (integral de linea cerrada) de un campo vectorial $\vec{A}$ es igual la integral de superficie del rotor de dicho campo. La supeficie S es aquella delimitada por la trayectoria L.»

Este teorema permite, para un dado campo vectorial, pasar de una integral de linea cerrada L a una integral de superficie abierta S.

4. Análisis y generalización de las ecuaciones de Maxwell

4.1. Ley de Gauss para el campo eléctrico

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

donde $q = \int_V \rho_v dv$
siendo ρ_v la «densidad volumétrica de carga»

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \frac{\rho_v}{\epsilon_0} dv$$

Recordando el teorema de Gauss-Ostrogradsky o Teorema de la divergencia

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) dv = \int_V \frac{\rho_v}{\epsilon_0} dv$$

Con lo que podemos quedarnos con los integrados de los dos últimos miembros

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \tag{4.1}$$

4.2. Ley de Gauss para el campo magnético

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Recordando el teorema de Gauss-Ostrogradsky o Teorema de la divergencia

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \left(\nabla \cdot \vec{B}\right) dv = 0$$

Con lo que podemos quedarnos con los dos últimos miembros, para los cuales debe cumplirse:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{4.2}$$

4.3. Ley de Faraday-Lenz

$$\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

donde $\varepsilon = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$
siendo ε la fem «fuerza electromotriz»

> *Nótese que la integral de linea (circulación) es cerrada. Para campos electrostáticos, que son conservativos, dicha integral es nula. Por su parte, los campos eléctricos variables en el tiempo generados por una variación del flujo magnético, no son conservativos, por lo que la integal cerrada de línea (circulación) resulta distinta de cero.*

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Recordando el teorema de Stokes o Teorema del Rotor:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\nabla \times \vec{E}\right) \cdot d\vec{S}$$

Con lo que

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{E}\right) \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{E}\right) \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B} \cdot d\vec{S}\right)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{4.3}$$

4.4. Ley de Ampere-Maxwell

$$\oint_L \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 i$$

donde $i = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$
siendo $\vec{J}$ la «densidad superficial de corriente», resultando, en principio:

$$\oint_L \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Aquí Maxwell propone añadir un término al miembro derecho de la igualdad, que contemple el siguiente caso:

Supóngase un tramo de circuito eléctrico con un capacitor de placas paralelas en serie, por la que circula una corriente alterna i.

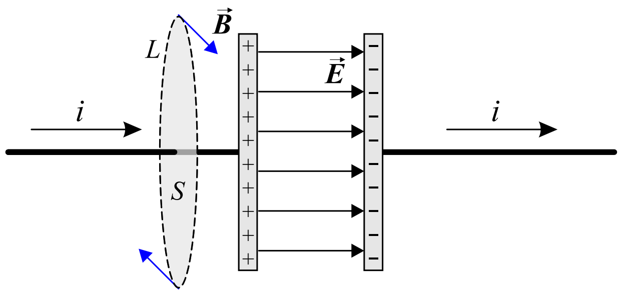

Figura 4.1: Análisis de corrientes.

Sobre el conductor de la izquierda se aplica la ley de Ampere, es decir, se propone una trayectoria amperiana L, que delimita a una superficie abierta S. De esta manera:

$$\oint_L \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 i_c$$

donde i_c es denominada *corriente de conducción*, dada por $i_c = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$

$$\oint_L \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \tag{4.4}$$

La trayectoria amperiana L no impone condiciones sobre cuál es la superficie S que encierra, por lo que debe cumplirse la ley de Ampere para el caso siguiente, en el cual la superficie se abomba de manera tal que pasa por la zona entre las placas del capacitor, donde no hay corrientes, sino campo eléctrico variable con respecto al tiempo.

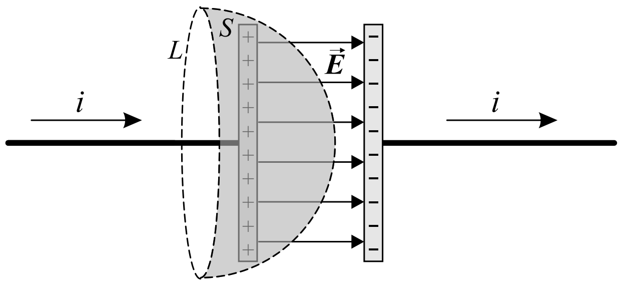

Figura 4.2: Análisis de la corriente de desplazamiento.

Al aplicar la ley de Ampere, obtenemos:

$$\oint_L \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 i_d$$

donde i_d es denominada *corriente de desplazamiento*, dada por $i_d = \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{dS}$
El flujo eléctrico es, por definición: $\Phi_E = \int_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = \int_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{dS}$
Quedando

$$\oint_L \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{dS} \tag{4.5}$$

Retomando la ley de Ampere original y considerando la existencia de ambas corrientes:

$$\oint_L \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 i$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \left(i_c + i_d \right)$$

con i_c: «corriente de conducción», debida a $\vec{J}$
y i_d: «corriente de desplazamiento», debida a $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\oint_L \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{dS} + \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \vec{dS}$$

La derivación temporal del primer término del segundo miembro puede incluirse en la integración espacial, ya que son operadores sobre distintas variables.

$$\oint_L \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \int_S \frac{d}{dt} \left(\epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{dS} \right) + \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \vec{dS}$$

Se obtiene entonces la ley de Ampere generalizada o ley de Ampere-Maxwell:

$$\oint_L \vec{B} \cdot \vec{dl} = \int_S \left(\mu_0 \vec{J} \cdot \vec{dS} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \cdot \vec{dS} \right)$$

Aplicando el teorema de Stokes $\oint_L \vec{B} \cdot \vec{dl} = \int_S \left(\nabla \times \vec{B} \right) \cdot \vec{dS}$ al primer miembro:

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{B} \right) \cdot \vec{dS} = \int_S \left(\mu_0 \vec{J} \cdot \vec{dS} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \cdot \vec{dS} \right)$$

Y dado que la superficie de integración es la misma, los integrandos son equivalentes.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{4.6}$$

5. Ecuaciones de Maxwell definitivas

5.1. Ley de Gauss para el campo eléctrico

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \tag{5.1}$$

«La divergencia del campo eléctrico es proporcional a la densidad volumétrica de carga.»

5.2. Ley de Gauss para el campo magnético

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{5.2}$$

«La divergencia del campo magnético es siempre nula, lo que implica la inexistencia de monopolos magnéticos.»

5.3. Ley de Faraday-Lenz

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{5.3}$$

«La variación temporal del campo magnético $\vec{B}\,(x, y, z, t)$ genera un campo eléctrico $\vec{E}\,(x, y, z, t)$, también variable con el tiempo, cuyo rotor es distinto de cero, por lo que resulta un campo NO conservativo.»

5.4. Ley de Ampere-Maxwell

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{5.4}$$

«Una corriente y/o una variación temporal del campo eléctrico $\vec{E}\,(x, y, z, t)$ genera un campo magnético $\vec{B}\,(x, y, z, t)$, también variable con el tiempo.»

6. Ecuación de onda electromagnética

6.1. Ecuaciones de Maxwell en el espacio material

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \tag{6.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{6.2}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{6.3}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{6.4}$$

6.2. Ecuaciones de Maxwell en el vacío

En el vacío, la densidad volumétrica de carga $\rho_v = 0$ y la densidad de corriente superficial $\vec{J} = 0$, con lo cual las ecuaciones de Maxwell pueden reescribirse, para el vacío, de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{6.5}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{6.6}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{6.7}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{6.8}$$

6.3. Ecuación de onda electromagnética

Dado que un campo magnético variable en el tiempo genera un campo eléctrico variable en el tiempo y éste, a su vez, genera al primero, es de interés analizar, mediante las ecuaciones de Maxwell, cuál es la expresión matemática que satisface las dadas condiciones. Para ello es necesario, a partir de las ecuaciones diferenciales ya planteadas 6.7 y 6.8, obtener una ecuación diferencial en la que sólo aparezca $\vec{E}$ y lo propio para el campo $\vec{B}$.

Analizando la ecuación 6.7:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

y haciendo uso de la identidad vectorial:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} \right) - \nabla^2 \vec{A}$$

que equivale a:

$$rot \left(rot\vec{A} \right) = grad \left(div\vec{A} \right) - \nabla^2 \vec{A}$$

Se obtiene

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{E} \right) - \nabla^2 \vec{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

y dado que en el vacío $\nabla \cdot \vec{E} = 0$

$$-\nabla^2 \vec{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

y dado que el rotor es un operador espacial y la derivada es temporal, puede conmutarse el orden entre ellos:

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \vec{B} \right)$$

mientras que de la ecuación 6.8: $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{6.9}$$

Ecuación diferencial de segundo orden para el campo eléctrico.

Un análisis idéntico puede realizarse para hallar la ecuación diferencial para el campo magnético $\vec{B}$, que resulta:

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{6.10}$$

6.4. Solución de la ecuación de onda

Para simplificar el análisis se supone que el campo $\vec{E}$ posee sólo componente x y su dirección de propagación es z quedando:

$$\frac{\partial^2 \vec{E_x}}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E_x}}{\partial t^2} = 0 \tag{6.11}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E_x}}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 \vec{E_x}}{\partial t^2} = 0 \tag{6.12}$$

donde ν es la velocidad de propagación de la onda, quedando

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c \tag{6.13}$$

que resulta la velocidad de propagación de la onda electromagnética en el vacío, o velocidad de la luz, cuyo valor es:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299{,}792{,}458 \frac{m}{s} \tag{6.14}$$

La solución a dicha ecuación tiene la forma:

$$\vec{E_x}(z,t) = E_{máx} sen\left(\omega t - \beta z\right) \hat{\imath} \tag{6.15}$$

Para comprobar que la función propuesta es solución de la ecuación diferencial se realizan las derivadas parciales espaciales y temporales:

$$\frac{\partial^2 \vec{E_y}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[E_{máx} sen\left(\omega t - \beta z\right) \right] = -\beta^2 E_{máx} sen\left(\omega t - \beta z\right) \tag{6.16}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E_y}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[E_{máx} sen\left(\omega t - \beta z\right) \right] = -\omega^2 E_{máx} sen\left(\omega t - \beta z\right) \tag{6.17}$$

Reemplazando las derivadas 6.16 y 6.17 en la ecuación diferencial 6.12:

$$\left[-\beta^2 E_{máx} sen\left(\omega t - \beta z\right)\right] - \frac{1}{\nu^2}\left[-\omega^2 E_{máx} sen\left(\omega t - \beta z\right)\right] = 0$$

$$-\beta^2 + \frac{\omega^2}{\nu^2} = 0$$

$$\beta = \frac{\omega}{c}$$

donde
c es la velocidad de la luz en el vacío (en metros por segundo)
ω es la frecuencia angular (en radianes por segundo)
β es la constante de fase o número de onda (en radianes por metro)

Cumpliéndose:

$$\omega = 2\pi f$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

donde
f es la frecuencia (en Hertz)
T es el período (en segundos)
λ es longitud de onda (en metros)

Dada la solución para el campo eléctrico:

$$\vec{E_x}\left(z,t\right) = E_{máx} sen\left(\omega t - \beta z\right)\hat{\imath}$$

puede utilizar la 3ra ecuación de Mawell en el vacío, ecuación 6.9 para hallar el campo $\vec{B}$ relacionado.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Considerando, en principio, que $\vec{E}$ posee las tres componentes, se desarrolla el rotor.

$$\nabla \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{k} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La única derivada distinta de cero es $\frac{\partial E_x}{\partial z}$, con lo cual el rotor se reduce drásticamente a:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{\jmath} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

De donde se deduce que $\vec{B}$ tiene componente y y viaja en dirección z.
Despejando $\vec{B}$:

$$\vec{B_y}\left(z,t\right) = -\int \frac{\partial E_x}{\partial z} dt\,\hat{\jmath}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} E_{máx} sen\left(\omega t - \beta z\right) = -\beta E_{máx} cos\left(\omega t - \beta z\right)$$

$$\vec{B_y}\left(z,t\right) = -\int \left[-\beta E_{máx} cos\left(\omega t - \beta z\right)\right] dt\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{B_y}(z,t) = \beta E_{máx}\hat{j}\int cos(\omega t - \beta z)\,dt$$

$$\vec{B_y}(z,t) = \frac{\beta}{\omega}E_{máx}sen(\omega t - \beta z)\,\hat{j}$$

$$\vec{B_y}(z,t) = B_{máx}sen(\omega t - \beta z)\,\hat{j}$$

donde $B_{máx} = \frac{\beta}{\omega}E_{máx}$

$$\frac{\beta}{\omega} = \frac{\frac{2\pi}{\lambda}}{2\pi f} = \frac{T}{\lambda} = \frac{1}{c}$$

Habiendo hallado la expresión del campo B, podemos ahora hallar el campo H:
con lo cual $B_{máx} = \mu_0 H_{máx} = \frac{E_{máx}}{c}$
resultando $H_{máx} = \frac{E_{máx}}{\mu_0 c}$

$$\vec{H_y}(z,t) = H_{máx}sen(\omega t - \beta z)\,\hat{j}$$

$$\vec{H_y}(z,t) = \frac{E_{máx}}{\mu_0 c}sen(\omega t - \beta z)\,\hat{j}$$

$$\vec{H_y}(z,t) = \frac{E_{máx}}{\frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}}sen(\omega t - \beta z)\,\hat{j}$$

$$\vec{H_y}(z,t) = \frac{E_{máx}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}sen(\omega t - \beta z)\,\hat{j}$$

definiendo así la *impedancia intrínseca del vacío:*

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$\eta_0 = 377\Omega$$

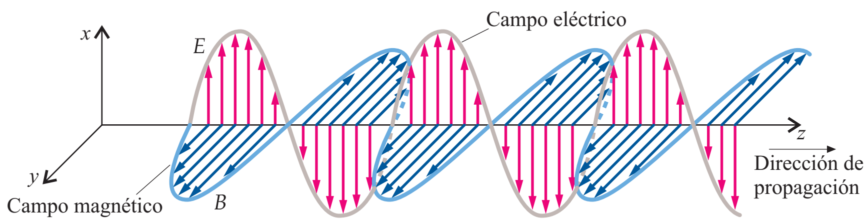

Figura 6.1: Ondas $E_x(z,t)$ y $B_y(z,t)$