Capacitor con dos dieléctricos en diagonal

5 de junio de 2016

Índice

1. Enunciado

Dado el capacitor de placas cuadradas paralelas de la figura, relleno con dos dieléctricos dispuestos en forma diagonal, se pide hallar la expresión de la capacidad del mismo en función de su geometría, área $A = L \times L = 1m^2$, separación entre placas $d = 10mm$ y las permitividades relativas $\varepsilon_{r_1} = 20$ y $\varepsilon_{r_2} = 80$. Luego, hallar el valor de dicha capacidad a partir de la expresión hallada.

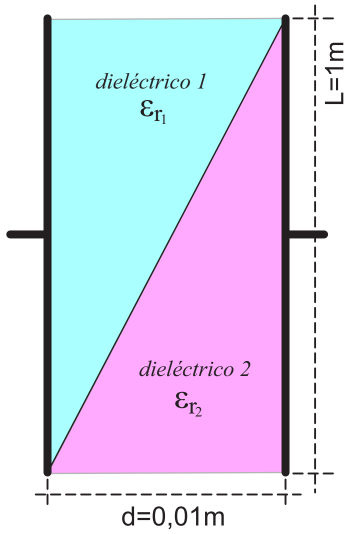

Figura 1: Capacitor con dieléctricos en diagonal

2. Respuesta

$$C_T = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d} \frac{\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}}{(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1})} \, ln\left(\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}\right)$$

$$C_T = 32,72nF$$

3. Solución

Es posible dividir el problema en una asociación de capacitores, dispuestos en serie y/o paralelo y, analizando dicha interconexión, llegar a una conclusión que permita obtener la capacidad total del sistema.

Analizando este caso en particular, podemos descomponer al capacitor en una cantidad dada de capacitores conectados en paralelo, como se aprecia en la figura siguiente.

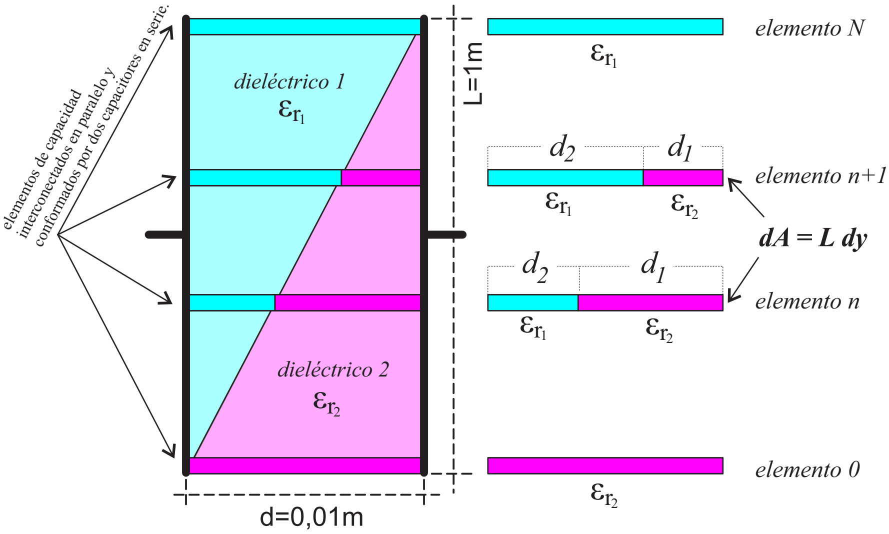

Figura 2: Descomposición en capacitores en paralelo.

La división del capacitor original, que llamaremos C_T en infinitos capacitores conectados en paralelo, nos permite hablar de capacidades diferenciales conectadas en paralelo entre sí, a las que llamaremos dC. Cada capacidad diferencial está compuesta por una asociación serie de dos capacitores, que podemos llamar dC_1 y dC_2, con permitividades relativas ε_{r_1} y ε_{r_2}respectivamente. Esto se detalla en la figura siguiente.

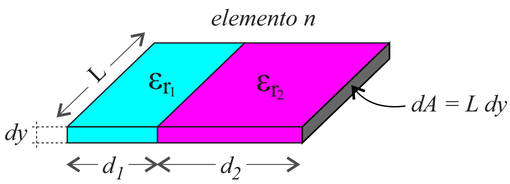

Figura 3: Análisis de cada diferencial dC

Cada elemento dC es entonces una asociación serie, por ende, lo expresamos de esa manera:

$$dC = \frac{1}{\frac{1}{dC_1} + \frac{1}{dC_2}}$$

Los diferenciales de capacidad dC_1 y dC_2 no son otra cosa que pequeños (infinitesimales) capacitores de placas paralelas cuya área de placa es dA y cuyas distancias entre placas resultan función de la posición en que se ubique el diferencial con respecto al eje vertical, que llamaremos d_1 y d_2. Entonces, las expresiones para cada uno son sabidas, tal que:

$$dC_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} dA}{d_1}$$

$$dC_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} dA}{d_2}$$

Analizando el gráfico, deducimos que

$$dA = L\,dy$$

Mientras que para d_1 y d_2, que son función (con pendiente $\frac{d}{L}$) de la altura "y", tenemos:

$$d_1 = \frac{d}{L}\,y$$

y dado que $d = d_1 + d_2$ $d_2 = d - d_1$, con lo que

$$d_2 = d - \frac{d}{L}\,y$$

De esta manera podemos expresar dC realizando los reemplazos correspondientes, paso por :

$$dC = \frac{1}{\frac{1}{dC_1} + \frac{1}{dC_2}}$$

$$dC = \frac{1}{\frac{1}{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} dA}{d_1}} + \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} dA}{d_2}}}$$

$$dC = \frac{1}{\frac{1}{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} Ldy}{\frac{d}{L}\,y}} + \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} Ldy}{d - \frac{d}{L}\,y}}}$$

Y ordenando la expresión, obtenemos

$$dC = \frac{1}{\frac{\frac{d}{L}\,y}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} Ldy} + \frac{d - \frac{d}{L}\,y}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} Ldy}}$$

$$dC = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} Ldy}{\left(\frac{d}{L}\,y\right)\varepsilon_{r_2} + \left(d - \frac{d}{L}\,y\right)\varepsilon_{r_1}}$$

$$dC = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} Ldy}{\frac{d}{L}\left[\varepsilon_{r_2} y + \varepsilon_{r_1}\left(L - y\right)\right]}$$

$$dC = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} L^2 dy}{d\left[\left(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}\right) y + \varepsilon_{r_1} L\right]}$$

Para hallar la capacidad total C_T se realiza la integración de dicho diferencial de capacidad para la variable y desde $y = 0$ hasta la altura $y = L$ de la placa.

$$C_T = \int_0^L dC = \int_0^L \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} L^2 dy}{d\left[\left(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}\right) y + \varepsilon_{r_1} L\right]}$$

$$C_T = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} L^2}{d} \int_0^L \frac{dy}{\left(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}\right) y + \varepsilon_{r_1} L}$$

La integral tiene la forma

$$\int \frac{dx}{a\,x + b}$$

cuya resolución, por tabla de integrales, resulta:

$$\int \frac{dx}{a\,x+b} = \frac{1}{a}\,ln|a\,x+b|$$

Para nuestra integral, tenemos:
$a = \varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}$
$b = \varepsilon_{r_1} L$
$dx = dy$
Con lo cual podemos, reemplazando adecuadamente, obtener la solución de la misma:

$$C_T = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} L^2}{d} \left[\frac{1}{\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}}\, ln|\left(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}\right)\, y + \varepsilon_{r_1} L| \right]_{y=0}^{y=L}$$

Aplicando Barrow:

$$C_T = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} L^2}{d\left(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}\right)}\, ln \left[\frac{\left(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}\right)\, L + \varepsilon_{r_1} L}{\varepsilon_{r_1} L} \right]$$

Trabajando un poco con la expresión, se reduce:

$$C_T = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d} \frac{\varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2}}{\left(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}\right)}\, ln \left(\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}} \right) \tag{1}$$

Que puede expresarse, sabiendo que la capacidad sin dieléctricos resulta $C_0 = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d}$ como:

$$C_T = C_0\, \frac{\varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2}}{\left(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}\right)}\, ln \left(\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}} \right)$$

Reemplazando valores obtenemos la capacidad total del sitema:

$$C_T = \frac{\left(8,85 \times 10^{-12} \frac{F}{m}\right)\left(1m^2\right)}{0,01m} \frac{20 \times 80}{(80-20)}\, ln \left(\frac{80}{20} \right)$$

$$C_T = 32716 \times 10^{-12} F = 32,72nF$$

4. Análisis de la solución

Este ejercicio, que a priori pareciera no tener una aplicación práctica directa, puede tenerla.
Imagine que el capacitor en cuestión se utiliza como un sensor capacitivo para detectar la proporción agua / aceite mineral de una mezcla, que como sabemos, se separará, con lo que el medio aceitoso flotará sobre el agua. Citando algunas permitividades relativas de distintos medios:

Aceite mineral 2,7
Aceite 2,8
Agua destilada 80
Caucho de 2,1 a 2,9
Acetona 191
Aire 1,00058986 ± 0.00000050 (en CNPT, para 0,9 MHz),1
Papel 1,5
Papel parafinado 3,7
Parafina 2,1
Cuarzo 4,5
PVC de 30 a 40
Baquelita 5
Vidrio de 5,6 a 10

Mica 5,4

Tomando Aceite mineral $\varepsilon_r = 2,7$ y Agua $\varepsilon_r = 80$ (ambos medidos en baja frecuencia o continua), podemos obervar que un mismo sensor capacitivo puede arrojar diferentes respuestas según cómo se coloque:

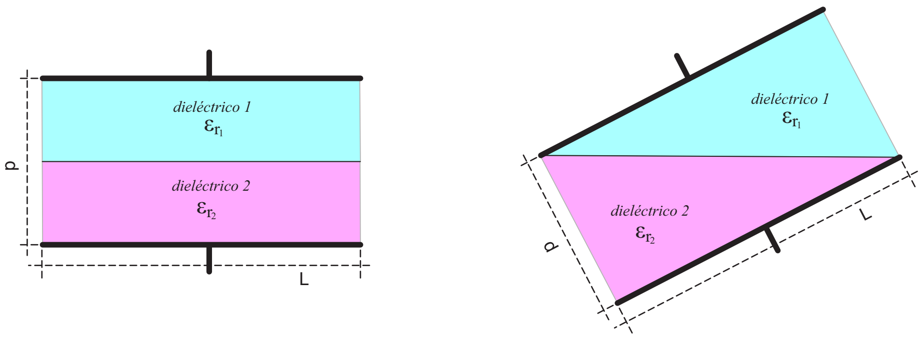

Figura 4: Dos dispocisiones distintas arrojan resultados distintos.

Para el primer caso, con el capacitor colocado con sus placas paralelas al suelo, la separación agua-aceite también resultará en una distribución de dos dieléctricos perfectamente combinados en una asociación serie, cuya respuesta resulta sencilla y de la forma:

$$C_{T_1} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

con $C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} A}{d_1}$ y $C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} A}{d - d_1}$ donde $d_1$es la variable dependiente de las cantidades de cada dieléctrico.

De esta manera:

$$C_{T_1} = \frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} A} + \frac{d - d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} A}}$$

$$C_{T_1} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} A}{d_1 \varepsilon_{r_2} + (d - d_1)\, \varepsilon_{r_1}}$$

$$C_{T_1} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \frac{\varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2}}{\frac{d_1}{d} \varepsilon_{r_2} + \left(\frac{d - d_1}{d}\right) \varepsilon_{r_1}}$$

Y si $d_1 = d_2 = \frac{d}{2}$:

$$C_{T_1} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} 2 \frac{\varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_2} + \varepsilon_{r_1}}$$

Mientras que para el segundo caso arroja la expresión ya calculada:

$$C_{T_2} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \frac{\varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2}}{(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1})} \, ln \left(\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}\right)$$

Estas expresiones son función de las permitividades relativas. Puede, también, expresárselas en función de d_1 y d_2 para un caso genérico en que sean disintos y de esa manera conocer la proporción de la mezcla, ya que de esos valores se desprende el volumen que ocupa cada dieléctrico. Según el caso, será conveniente una u otra expresión, válida simplemente girando el capacitor (sensor) según corresponda, ya que su capacidad varía entre una y otra posición angular.

Para el caso que da origen a este apunte, donde

$$C_T = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \frac{\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}}{(\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1})} \, ln\left(\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}\right)$$

Si el medio superior es aire, cuya permitividad relativa se redondea a $\varepsilon_{r_1} = 1$, la expresión se reduce a:

$$C_T = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \frac{\varepsilon_{r_2}}{(\varepsilon_{r_2} - 1)} \, ln\left(\varepsilon_{r_2}\right)$$

Para los valores dados y tomando $\varepsilon_{r_1} = 1$, la capacidad varía con ε_{r_2} con la siguiente forma:

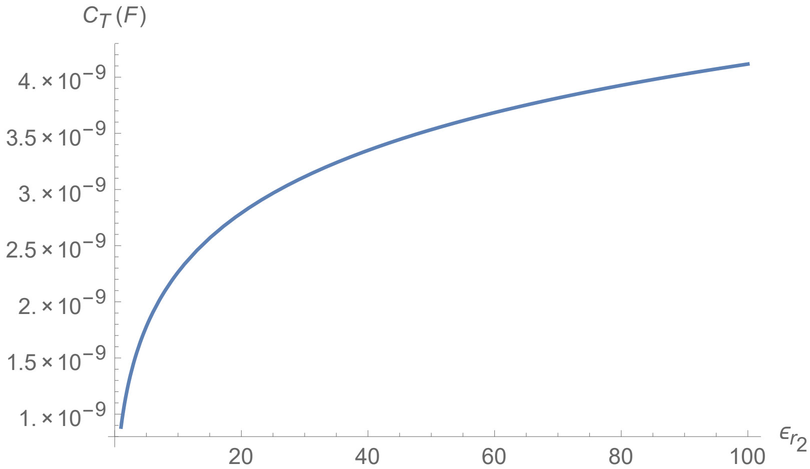

Figura 5: $C_T = f\left(\varepsilon_{r_2}\right)$

Por lo tanto, para este caso, el medio cuya permitividad relativa es ε_{r_2} puede ser desconocido y, de acuerdo al valor medido de capacidad puede ser deducido ingresando al gráfico anterior por el eje de ordenadas (capacidad medida) y obteniendo así el valor de ε_{r_2} que corresponde a la misma, permitiendo así conocer o diferenciar el medio 2, incógnita.